الامتياز

فى

الرياضيات



الصف

الثانى

الاعدادى

2019

إعداد

ا/ عبدالمقصود حنفى

الترم الثانى

أولا التحليل

(١) التحليل بإخراج ع م أ

(١) حلل كلا مما يأتى

[١] ٨ س^{٢} + ١٢ س

= ٤ س (٢س + ٣)

[٢] ١٠ س ص – ٨ س ع

= ٢ س (٥ ص – ٤ ع)

[٣] ٤ س^{٢}ص^{٢} ع + ٨ س^{٢} ص^{٣} – ٢ س^{٢}ص^{٢}

= ٢ س^{٢} ص^{٢} (٢ ع + ٤ ص – ١)

[٤] ٢ س – ١٢

= ٢ (س – ٦)

[٥] ٥ س – ٢٠

= ٥(س – ٤)

[٦] ٢ س + ٤

= ٢ (س + ٢)

[٧] س^{٣} + ٥ س

= س (س^{٢} + ٥)

[٨] س^{٣} – ٥س^{٢} + ٣

= س (س^{٢} – ٥ س + ٣)

[٩] ٨ أ^{٢}ب^{٣} – ١٢ أ ب^{٣}

= ٤أ ب^{٣} (٢ أ – ٣)

(٢) تحليل المقدار الثلاثى

الثلاثى البسيط فى الصورة س^{٢} + ب س + حـ

معامل س^{٢} = ١

(٢) حلل كلا مما يأتى

[١] س^{٢} + ٣س + ٢ = (س + ٢) (س + ١)

[٢] س^{٢} – ١٠ س + ٢٤

= (س – ٤) (س – ٦)

[٤] م (م + ٧) – ١٨ = م^{٢} + ٧م – ١٨

= (م + ٩) (م – ٢)

[٥] س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٤س

= س (س^{٢} – ٥س + ٤)

= س (س – ١) (س – ٤)

[٦] ٣س^{٢} – ٣٠س + ٦٣

= ٣ (س^{٢} – ١٠س + ٢١)

= ٣ (س – ٣) (س – ٧)

[٧] س^{٢} – ١٣ س + ٣٦

= (س – ٤) (س – ٩)

[٨] ٩ – ٨ س – س^{٢}

= – س^{٢} – ٨س + ٩

= – (س^{٢} + ٨س – ٩)

= – (س – ١) (س + ٩)

تمارين (١)

س١ حلل كلا مما يأتى تحليلا تاما

١) س^{٢} – ٥ س + ٦
٢) س^{٢} – ٧ س + ١٢
٣) س^{٢} – ٩ س + ٢٠
٤) س^{٢} – ٨ س + ١٥
٥) س^{٢} – ٨ س + ١٢
٦) س^{٢} – ٧ س + ١٠
٧) س^{٢} – ٢ س – ١٥
٨) س^{٢} – ١٠ س + ٢٤
٩) س^{٢} – ١٤ س + ٢٤
١٠) س^{٢} – ١٠ س – ٢٤
١١) س^{٢} – ٢ س – ٢٤
١٢) س^{٢} + س – ٢٠
١٣) س^{٢} + ٤ س – ١٢
١٤) س^{٢} = ١١ س + ٣٠
١٥) س^{٢} – ٧ س = ٣٠
١٦) س^{٣} – ٨ س^{٢} + ١٥ س
١٧) س^{٤} – ١٠ س^{٢} + ١٦
١٨) س^{١٠} – ٩ س^{٥} + ٢٠
١٩) س^{٨} – س^{٤} – ٣٠
٢٠) س^{٤} – س^{٢} – ٤٢
٢١) س^{٢} – س = ١٢
٢٢) س^{٢} – ٣ س – ١٠
٢٣) س^{٢} – س – ٢٠

١) س^{٢} + ٣ س – ٢٧
٢) س^{٢} – ٦ س – ١٦
٣) س^{٢} – ٢ س – ٨
٤) س^{٢} – ٥ س + ١٤
٥) س^{٢} – ١١ س + ٢٤
٦) س^{٢} – ٢٥ س + ٢٤
٧) س^{٢} – ٥ س – ٢٤
٨) س^{٢} – ٢٣ س – ٢٤
٩) س^{٢} + س – ١٢
١٠) س^{٢} + ١١ س – ١٢
١٢) س^{٢} – ١٣ س – ٣٠
١١) س^{٢} + ٢ س – ٣٥
١٣) س^{٣} – ١٢ س^{٢} + ٣٥ س
١٤) س^{٦} – ٦ س^{٣} + ٨
١٥) س (س + ٧) + ١٠
١٦) س^{٦} + ٣ س^{٣} – ٥٤

س٢ أوجد قيمة ك الصحيحة الموجبة التى تجعل المقدار قابل للتحليل

١) س^{٢} – ٩ س + ك
٢) س^{٢} – ك س – ٢
٣) س^{٢} + ٥ س + ك
٤) س^{٢} + ك س – ٣٠

تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط معامل س^٢ ≠ ١

١) ٢س^٢ – ١٣س + ١٥

= (٢س – ٣)(س – ٥)

٢س – ٣ / س – ٥

٢) ١٥م^٢ - ١٩م + ٦

= (٥م – ٣)(٣م – ٢)

٥م – ٣ / ٣م – ٢

٣) ٥م^٢ + ٦م - ٢٧

= (٥م – ٩)(م + ٣)

٥م – ٩ / م + ٣

٤) ٢س^٢ + س – ٢١

= (٢س + ٧)(س – ٣)

٢س + ٧ / س – ٣

٥) ١٥م^٢ - ١٩م + ٦

= (٥م – ٣)(٣م – ٢)

٥م – ٣ / ٣م – ٢

٦) ١٠س^٢ – ٣٤س + ٢٨

= ٢(٥س^٢ – ١٧س + ١٤)

= ٢(٥س – ٧)(س – ٢)

٥س – ٧ / س – ٢

تمارين (٢)

س١: حلل كلاً من المقادير الأتية

١) ٢س^٢ – ١٣س + ١٥
٢) ١٥س^٢ – ١٩س + ٦
٣) ٣س^٢ – ١٧س + ١٠
٤) ٥س^٢ – ١٤س + ٨
٥) ٢س^٢ – ١٣س + ١٠
٦) ٢س^٢ + ٧س – ١٥
٧) ٥س^٢ – ٧س – ٦
٨) ٥س^٢ – ٢س – ٣
٩) ٢س^٢ + س – ٢١
١٠) ٦س^٢ – ٥س – ٦
١١) ٦س^٢ – ٢٣س + ٢٠
١٢) ٥س^٢ – ٢٢س + ٨
١٣) ٣س^٢ – ١١س + ١٠
١٤) ٥س^٢ – ٢٢س + ٨
١٥) ١٢س^٢ – ٢٣س + ١٠
١٦) ٣س^٢ + ١٠س – ٨
١٧) ٣س^٢ – ١٠س – ٨
١٨) ٣س^٢ – س – ١٠
١٩) ٣س^٢ + ٤س – ٣٢
٢٠) ١٥س^٢ + ٧س – ٤

المقدار الثلاثى المربع الكامل

شروطه

1 الحد الأول مربعاً كاملاً

2 الحد الأخير مربعاً كاملاً

3 الحد الأوسط = ± ٢ × √الأول × √الأخير

مثال ١ اي مما ياتى مربع كامل

1 س^٢ + ٦س + ٩ ⟸ مربع كامل

2 س^٢ – ٨س ص + ١٦ص^٢ ⟸ **ليس مربع كامل**

3 س^٢ + ٥س ص + ٢٥ ص^٢ ⟸ **ليس مربع كامل**

4 ٢٥س^٢ – ٢٠س + ٤ ⟸ مربع كامل

==

إذا كان المقدار مربعاً كاملاً فإن :-

الحد الأول = (الحد الأوسط)^٢ / (٤ × الحد الأخير)

الحد الأخير = (الحد الأوسط)^٢ / (٤ × الحد الأول)

الحد الأوسط = ± ٢ × √الحد الأول × √الحد الأخير

==

مثال ٢ أوجد قيمة ك التى تجعل المقدار مربع كامل

1 ٢م^٢ – ٢ م + ك

الحل

∴ الحد الأخير = (الحد الأوسط)^٢ / (٤ × الحد الأول)

= (٢م × ٢م) / (٤ × م^٢) = ٤م^٢ / ٤م^٢ = ١

2 ك س^٢ + ٢٠ س + ٢٥

الحل

∴ الحد الأول = (الحد الأوسط)^٢ / (٤ × الحد الأخير)

= (٢٠س)^٢ / (٤ × ٢٥) = (٢٠س × ٢٠س) / (٤ × ٢٥) = ٤س^٢

∴ ك = ٤

==

3 ١٦ص^٢ + ك ص + ١٠٠

الحل

الحد الأوسط = ± ٢ × √الحد الأول × √الحد الأخير

= ± ٢ × ٤ × ١٠ = ± ٨٠

==

مثال ٣ حلل كلاً مما يلى تحليلاً كاملاً

1 س^٢ + ١٠ س ص + ٢٥ ص^٢

= (س + ٥ص)^٢

2 ٢٥س^٢ – ٢٠ س + ٤

= (٥ س - ٢)^٢

3 س^٢ – ٨س ص + ١٦ص^٢

= (س - ٤ص)^٢

==

مثال٤

أستخدم التحليل فى تسهيل إيجاد قيمة كلا من المقادير الاتية

1 (٧٣)^٢ – ٢ × ٧٣ × ٦٣ + (٦٣)^٢

الحل

= (٧٣ – ٦٣)^٢ = (١٠)^٢

= ١٠٠

تمارين (٣)

س١ بين أى المقادير الآتية مربعاً كاملاً

[١] $م^٢ + ٩$

[٢] $م^٢ - م ب + ب^٢$

[٣] $ل^٢ - ٨ ل م + ١٦ م^٢$

[٤] $٣٦ م^٢ - ٨٤ م + ٤٩$

[٥] $٤ + ٣٦ م^٢ + ٨١ م^٦$

[٦] $٤ جـ^٤ - ١٢ جـ^٢ ء - ٩ ء^٢$

[٧] $٤ س^٢ - ٦ س ص + ٩ ص^٢$

[٨] $م^٢ - ٢ م ب - ب^٢$

س٢ : حلل كلاً مما يلى تحليلاً كاملاً :

1 $س^٢ - ١٠ س + ٢٥$

2 $س^٢ + ٢ س + ١$

3 $س^٢ + ١٢ س + ٣٦$

4 $س^٢ - ٨ س + ١٦$

5 $س^٢ - ١٤ س + ٤٩$

6 $س^٤ + ٢ س^٢ + ١$

7 $س^٢ ص^٢ + ١٠ س ص + ٢٥$

8 $س^٢ ص^٢ - ٦ س ص + ٩$

9 $٩ س^٢ - ٦ س + ١$

10 $٢٥ س^٢ + ١٠ ص + ١$

11 $٢٥ س^٢ - ٣٠ س + ٩$

12 $٣٦ س^٢ + ٦٠ س + ٢٥$

13 $٤ س^٢ - ١٢ س ص + ٩ ص$

14 $٩ س^٢ - ٢٤ س ص + ١٦ ص^٢$

س٣ : أكمل كلا من المقادير الاتية حتى تكون مربع كامل

1 $٩ س^٢ +$ .... $+ ١٦ ص^٢$

2 .... $+ ٢٠ س + ٤$

3 .... $+ ٦ س ص + ١$

4 $١٦ أ^٢ +$ .... $+ ٩ ب^٢$

5 $١ -$ .... $+ ٢٥ س^٢$

6 $٢٥ س^٢ + ٣٠ س ص +$ ....

7 $٤ س^٢ +$ .... $+ ١$

8 .... $- ١٠ ص + ١$

9 $٢٥ م^٢ - ١٠ م ن +$ ....

10 $٤ س^٢ - ٣٦ س +$ ....

س٤ : أوجد قيمة ك الموجبة التى تجعل كل مقدار ثلاثى مربعاً كاملاً : -

1 $٣٦ س^٢ + ك س + ١$

2 $٢٥ س^٢ + ٤٠ س + ك$

3 $ك س^٢ + ٢٠ س + ٢٥$

4 $ك^٢ س^٢ - ٣٠ س + ٩$

5 $٤٩ س^٢ - ٢ ك س + ٩$

6 $٩ س^٢ - س + ك$

7 $٤ س^٢ + س + ك$

8 $ك أ^٢ ب^٢ - ١٢ أ ب + ٩$

9 $٤ س^٢ + ١٢ س + ك^٢$

10 $١٦ ص^٢ + ك ص + ١٠٠$

تحليل الفرق بين مربعين

☜ م^{٢} – ب^{٢} ⟸ يسمى مقدار فرق بين مربعين

لتحليل الفرق بين مربعين

= قوسين متشابهين مع الإختلاف فى الإشارة فقط

= (√الأول - √الثانى) (√الأول + √الثانى)

∴ م^{٢} – ب^{٢} = (م – ب) (م + ب)

مثال١ حلل كلا مماياتى تحليلا تاما

١) ٩ س^{٢} – ١ = (٣س – ١) (٣س + ١)

٢) م^{٢} – ٤٩ب^{٢} = (م + ٧ب) (م – ٧ب)

٣) س^{٢} – ١٠٠ = (س – ١٠) (س + ١٠)

٤) ٣س^{٢} – ١٢ = ٣ (س^{٢} – ٤)

= ٣ (س – ٢) (س + ٢)

٥) س^{٣} – ٩ س = س (س^{٢} – ٩)

= س (س – ٣) (س + ٣)

٦) س^{٤} – ١٦ = (س^{٢} – ٤) (س^{٢} + ٤)

= (س – ٢) (س+٢) (س^{٢}+٤)

٧) (س+١)^{٢} – ٩ =

[(س+١) – ٣] [(س+١) + ٣]

= (س – ٢) (س+٤)

مثال٢

استخدم تحليل الفرق بين مربعين لتسهيل إيجاد قيمة : -

١) (٦,٤)^{٢} – (٣,٦)^{٢}

= (٦,٤ - ٣,٦) (٦,٤ + ٣,٦)

٢,٨ × ١٠ = ٢٨

==========================

٢) (٣٣)^{٢} – (٢٣)^{٢}

= (٣٣ – ٢٣) (٣٣ + ٢٣)

١٠ × ٥٦ = ٥٦٠

==========================

مثال ٣

١) إذا كان س – ص = ٣ ، س + ص = ٥

أوجد قيمة س^{٢} – ص^{٢}

الحل:-

س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص) (س + ص)

= ٣ × ٥ = ١٥

٢) إذا كان م^{٢} – ب^{٢} = ٣٥ ، م + ب = ٧

أوجد قيمة م – ب

الحل:-

∵ م^{٢} – ب^{٢} = ٣٥

∴ (م – ب) (م + ب) = ٣٥

(م – ب) × ٧ = ٣٥

م – ب = ٣٥/٧ = ٥

تمارين (٤)

س١: حلل كلاً مما يلي تحليلاً كاملاً :-

1. $س^٢ - ١$
2. $س^٢ - ١٦$
3. $س^٤ - ٤٩$
4. $س^٤ - ١٠٠$
5. $س^٢ ص^٢ - ٦٤$
6. $٨ س^٢ - ٢$
7. $١٢١ س^٢ - ص^٢$
8. $٩ س^٢ + ١٦$ -
9. $س^٣ - ١٦ س$
10. $س^٥ - س$
11. $\frac{١}{٢٥} س^٢ - ٩$
12. $(م + ب)^٢ - ٩$
13. $س^٢ - ٤$
14. $س^٢ - ٣٦$
15. $س^٦ - ٢٥$
16. $م^٢ - ب^٢$
17. $١٦ س^٢ - ١$
18. $س^٤ - ١٦$
19. $٣ س^٢ - ٤٨$
20. $١٢ م^٢ - ٥٢ ب^٤$
21. $٥ م س^٢ - ٨٠ م$
22. $(٣ س - ٢)^٢ - ١٠٠$
23. $١ - (م - ب)^٢$

س٢: بإستخدام التحليل أوجد قيمة كلا من المقادير الأتية

1. $(٩٩٩)^٢ - ١$
2. $(٩٦)^٢ - ١٦$
3. $(٧٧)^٢ - (٢٣)^٢$
4. $(١١,٦)^٢ - (١,٦)^٢$
5. ٢١×١٩
6. $(٩٧)^٢ - ٩$
7. $(٦٥)^٢ - (٣٥)^٢$
8. $(٥٥)^٢ - (٤٥)^٢$
9. $(٩٥)^٢ - ٢٥$
10. ١٠٢×٩٨

س ٣ : إذا كانت $س - ص = ٥$ ، $س + ص = ٨$

فأوجد قيمة $س^٢ - ص^٢$

س ٤ : إذا كانت $س^٢ - ص^٢ = ٤٥$ ، $س + ص = ٩$

أوجد قيمة $س - ص$

س ٥ : إذا كان $أ - ب = ٤$ ، $أ + ب - ٧ = ٠$

أوجد $أ^٢ - ب^٢$

س ٦ : إذا كانت $س - ص = ٤$ ، $س^٢ - ص^٢ = ٢٨$

أوجد $س + ص$

تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

١) س^{3} – ص^{3} = (س – ص) (س^{2} + س ص + ص^{2})

٢) س^{3} + ص^{3} = (س + ص) (س^{2} - س ص + ص^{2})

مثال١: حلل كلاً مما يلي تحليلاً كاملاً:

١) س^{3} + ٨ = (س + ٢) (س^{2} – ٢ س + ٤)

٢) س^{3} – ١٢٥ = (س – ٥) (س^{2} + ٥ س + ٢٥)

٣) ٨ س^{3} - ٢٧ = (٢ س - ٣) (٤ س^{2} + ٦ س + ٩)

٤) س^{3} + ١٢٥ = (س + ٥) (س^{2} - ٥ س + ٢٥)

٥) ٢ س^{3} + ٢٥٠ = ٢ (س^{3} + ١٢٥)
= ٢ (س + ٥) (س^{2} – ٥ س + ٢٥)

٦) س^{4} – ٢٧ س = س (س^{3} – ٢٧)
= س (س – ٣) (س^{2} + ٣ س + ٩)

مثال٢ إذا كان س – ص = ٣
، س^{2} + س ص + ص^{2} = ٧ أوجد س^{3} – ص^{3}

الحل:-
س^{3} – ص^{3}
= (س – ص) (س^{2} + س ص + ص^{2})
= ٣ × ٧ = ٢١

مثال٣

إذا كان س^{3} – ص^{3} = ٣٠ ، س – ص = ٥
أوجد س^{2} + س ص + ص^{2}

الحل:-

س^{3} – ص^{3} = ٣٠

(س – ص) (س^{2} + س ص + ص^{2}) = ٣٠

٥ × (س^{2} + س ص + ص^{2}) = ٣٠

س^{2} + س ص + ص^{2} = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦

تمارين (٥)

س١ : حلل كلاً مما يأتى :-

1. س^{3} + ١
2. م^{3} + ب^{3}
3. ٢٧ س^{3} – ٣٤٣
4. ٨ س^{3} – ٢٧ ص^{3}
5. س^{3} ص^{3} – ٨
6. ل^{3} - $\frac{١}{٨}$
7. م^{3} – ٠,٠٠١
8. ٧ س^{5} + ٥٦ س^{2}
9. $\frac{١}{٣}$ س^{3} – ٩
10. ١٢٥ م^{3} – ١

==========================

س٢: إختصر لأبسط صورة :

1. (س^{3} + ٨) – (س – ٢) (س^{2} + ٢ س + ٤)
2. (س – ١) (س^{2} + س + ١) – س^{3}

==========================

س٣ : -

1. إذا كان س – ص = ٢ ، س^{2} + س ص + ص^{2} = ٩
أوجد س^{3} – ص^{3}
2. إذا كان س^{3} – ص^{3} = ٥٤ ، س – ص = ٦ أوجد س^{2} + س ص + ص^{2}

==========================

التحليل بالتقسيم

نستخدم التحليل بالتقسيم إذا كان المقدار الجبرى مكون من أربعة حدود

مثال١) حلل كلاً مما يلى تحليلاً كاملاً:-

١) أ س + ب س + أ ص + ب ص

الحل: = (أ س + ب س) + (أ ص + ب ص)

= س (أ + ب) + ص (أ + ب)

= (أ + ب) (س + ص)

---

٢) أ^{2} + أب − ٢ أ − ٢ب

الحل: = (أ^{2} − ٢ أ) + (أب − ٢ب)

= أ (أ − ٢) + ب (أ − ٢)

= (أ − ٢) (أ + ب)

---

٣) ٢ أ ب − ١٠ أ + ٣ ب − ١٥

الحل: = (٢ أب − ١٠ أ) + (٣ب − ١٥)

= ٢ أ (ب − ٥) + ٣ (ب − ٥)

= (ب − ٥) (٢أ + ٣)

---

٤) ٢ص^{2} + ٤ أ ص − ص − ٢ أ

الحل: = (٢ص^{2} + ٤ أ ص) + (−ص − ٢ أ)

= ٢ص (ص + ٢ أ) − (ص + ٢ أ)

= (ص + ٢ أ) (٢ ص − ١)

---

٥) س^{2} − ٥ س − ٤ ص^{2} + ١٠ ص

الحل: = (س^{2} − ٤ ص^{2}) + (−٥س + ١٠ ص)

= (س − ٢ ص) (س + ٢ص) − ٥ (س − ٢ ص)

= (س − ٢ ص) (س + ٢ ص − ٥)

---

٦) أ^{2} + ٦ أب − ٩ب^{2} − ١٦س^{2}

الحل:

= (أ^{2} + ٦ أب − ٩ب^{2}) − ١٦س^{2}

= (أ − ٣ب)^{2} − ١٦س^{2}

= (أ + ٣ب − ٤س) (أ − ٣ب + ٤س)

تمارين (٦)

س١: حلل كلاً مما يلى :-

1. ٢ أ^{2} − ٢ ب + أ ب − ٤ أ
2. ٥ ب + س أ + ٥ أ + س ب
3. س^{2} − ص^{2} + ٥ س − ٥ ص
4. ٣ جـ س + ٥ س − ٥ − ٣ جـ
5. جـ^{2} + جـ ء + ء هـ + جـ هـ
6. س ص + ٥ ص + ٧ س + ٣٥
7. س^{3} + س^{2} + ٩ س + ٩
8. س^{2} − ١٠ س + ٢٥ − ص^{2}
9. أ^{3} + ب^{3} − أ − ب
10. س^{3} + ٢س^{2} − س − ٢
11. ٢٥ س^{2} − ص^{2} − ٢ص − ١
12. ٤ س^{2} + ٢٠س ص + ٢٥ص^{2} − ٩
13. أس − ٣ س + أص − ٣ ص
14. س^{3} − ٣ س^{2} + ٩ س − ٢٧
15. س^{3} − س^{2} − ٩ س + ٩
16. ٧ س − ٢٨ + أ س − ٤ أ
17. أ ب + ٦ م ن − ٢ ب م − ٣ أ ن
18. أ س − جـ ص − جـ س + أ ص
19. ٥ ل − ١٠ م − أ ل + ٢ أ م
20. س^{2} − ٤ ص^{2} − ٥ س + ١٠ ص
21. س^{2} − ٦ س ص + ٩ ص^{2} − ع^{2}
22. أ^{2} − ب^{2} + أ + ب

التحليل بإكمال المربع

مثال ١ **حلل كلا من المقادير الأتية**

١) س^{٤} + ٤ ص^{٤}

الحل :

س^{٢}
٢ص^{٢}
٢
٤س^{٢}ص^{٢}

= (س^{٤} + ٤ س^{٢} ص^{٢} + ٤ ص^{٤}) – ٤ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} + ٢ ص^{٢})^{٢} – ٤ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٢س ص) (س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢ س ص)

= (س^{٢} – ٢ س ص + ٢ص^{٢}) (س^{٢} + ٢س ص + ٢ ص^{٢})

==

٢) س^{٤} + ٦٤

الحل :

س^{٢}
٨
٢
١٦س^{٢}

=(س^{٤} + ١٦ س^{٢} + ٦٤) – ١٦ س^{٢}

=(س^{٢} + ٨)^{٢} – ١٦ س^{٢}

=(س^{٢} + ٨ – ٤ س) (س^{٢} + ٨ + ٤ س)

=(س^{٢} – ٤س + ٨) (س^{٢} + ٤س + ٨)

==

٣) ٩ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١

الحل :

٣س^{٢}
١
٢
٦س^{٢}

= (٩س^{٤} + ٦س^{٢} + ١) + ٢ س^{٢} – ٦س^{٢}

= (٩ س^{٤} + ٦ س^{٢} + ١) – ٤ س^{٢}

= (٣س^{٢} + ١)^{٢} – ٤ س^{٢}

= (٣س^{٢} + ١ – ٢ س) (٣ س^{٢} + ١ + ٢ س)

= (٣س^{٢} – ٢ س + ١) (٣س^{٢} + ٢ س + ١)

==

٤) م^{٤} + ٤ م^{٢} ب^{٢} + ١٦ ب^{٢}

الحل :

م^{٢}
٤ب^{٢}
٢
٨م^{٢}ب^{٢}

=(م^{٤} + ٨ م^{٢} ب^{٢} + ١٦ ب^{٤}) + ٤ م^{٢} ب^{٢} – ٨ م^{٢} ب^{٢}

(م^{٢} + ٤ب^{٢})^{٢} – ٤ م^{٢} ب^{٢}

(م^{٢} + ٤ب^{٢} – ٢ م ب) (م^{٢} + ٤ب^{٢} + ٢ م ب)

(م^{٢} – ٢ م ب + ٤ب^{٢}) (م^{٢} + ٢ م ب + ٤ ب^{٢})

تمارين (٧)

س١: حلل كلا من المقادير الاتية

1. ٤ م^{٤} + ١
2. ب^{٤} + ٦٤
3. ٨١س^{٤} + ٤ ع^{٤}
4. س^{٤} +٦٤ ص^{٤}
5. ٤س^{٤} +٦٢٥ ع^{٤}
6. ٤س^{٤} +٣ ص^{٤}
7. ٦٤ ب^{٤} +١
8. ٤ س^{٤} +٨١ ص^{٤}
9. ٦٤س^{٤} +٨١ ص^{٤}
10. س^{٤} + ٩ س^{٢} +٨١
11. ٩س^{٤} – ٢٥ س^{٤}
12. م^{٤} – ١١ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤}
13. ٣٦ س^{٤} +٥١ س^{٢} +٢٥
14. م^{٤} + ٢٥٠٠ ب^{٤}
15. س^{٤} +٣ س^{٢} ص^{٢} + ٤ ص^{٤}
16. س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} +٢٥ ص^{٤}
17. س^{٤} + ص^{٤} – ٧ س^{٢} ص^{٢}
18. ١٦س^{٤} – ٢٨ س^{٢} ص^{٢} +٩ ص^{٤}
19. ٤س^{٤}+٢٥ص^{٤} - ٢٩ س^{٢} ص^{٢}
20. م^{٤} + ن^{٤} – ١٨ م^{٢} ن^{٢}
21. ٢٥س^{٤} +٩ ص^{٤} – ٣٤س^{٢}ص^{٢}

حل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد

القاعدة

إذا كان س × ص = ٠ فإن :
إما س = ٠ وإما ص = ٠

مثال ١ أوجد فى ح مجموعة حل كل من

١) س٢ - ٨ س + ١٥ = ٠

الحل :

(س - ٣) (س - ٥) = ٠

س - ٣ = ٠ س - ٥ = ٠

س = ٣ س = ٥

م.ح = { ٣ ، ٥ }

==

٢) س٢ - ٩ = ٠

الحل :

(س - ٣) (س + ٣) = ٠

س - ٣ = ٠ س + ٣ = ٠

س = ٣ س = -٣

م.ح = { ٣ ، -٣ }

==

٣) س٢ – ٢ س – ٤٨ = ٠

الحل :

(س – ٨) (س + ٦) = ٠

س – ٨ = ٠ أو س + ٦ = ٠

∴ س = ٨ س = -٦

∴ م.ح = { ٨ ، -٦ }

==

٤) ٢ س٢ – ٥ س = ٠

الحل :

س (٢ س – ٥) = ٠

س = ٠ أو ٢س – ٥ = ٠

٢س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$

∴ م.ح = { ٠ ، $\frac{٥}{٢}$ }

٥) ٢ س٢ - ٦٠ = -١٤ س

الحل :

٢ س٢ + ١٤ س - ٦٠ = ٠

٢ (س٢ + ٧ س - ٣٠) = ٠

٢ (س - ٣) (س + ١٠) = ٠

س - ٣ = ٠ س + ١٠ = ٠

س = ٣ س = -١٠

م.ح = { ٣ ، -١٠ }

==

٦) (س - ٣) (س + ١) = ٥

الحل :

س٢ - ٢ س - ٣ = ٥

س٢ - ٢ س - ٣ - ٥ = ٠

س٢ - ٢ س - ٨ = ٠

(س + ٢) (س - ٤) = ٠

س + ٢ = ٠ س - ٤ = ٠

س = -٢ س = ٤

م.ح = { -٢ ، ٤ }

==

٧) س٢ + ٢٥ = ٠

الحل :

م.ح = ∅

==

٨) س٢ + ٤ = ٠

الحل :

م.ح = ∅

تمارين (٨)

س ١ : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الأتية :-

[١] س^{٢} – ٧ س +١٢ = ٠

[٢] س^{٢} - ٨ س +١٥ = ٠

[٣] س^{٢} + ٥ س +٦ = ٠

[٤] س^{٢} – ٥ س – ٦ = ٠

[٥] س^{٢} – ٢ س – ٢٤ = ٠

[٦] س^{٢} – س – ٢٠ = ٠

[٧] س^{٢} + ٣س – ١٠ = ٠

[٨] س^{٢} – ١ = ٠

[٩] س^{٢} – ٩ = ٠

[١٠] س^{٢} – ١٠٠ = ٠

[١١] ٤س^{٢} – ٩ = ٠

[١٢] س^{٢} +٢٥ = ٠

[١٣] س^{٢} = س

[١٤] س^{٢} = ٢

[١٥] س^{٢} = - س

[١٦] س^{٢} = -٣ س

[١٧] س^{٣} = س

[١٨] س^{٢} – ٦ س +٩ = ٠

[١٩] س^{٢} – ٢ س +١ = ٠

[٢٠] س^{٢} +٤ س +٤ = ٠

[٢١] س^{٢} +١٠ س +٢٥ = ٠

[٢٢] ٤س^{٢} = ١

[٢٣] ٢٥س^{٢} = ٤

[٢٤] ٩ س^{٢} = ١

[٢٥] س (س – ٥) + ٦ = ٠

[٢٦] س (س +٣) = ١٠

[٢٧] (س+٤)(س – ٢) +٥ = ٠

[٢٨] (س – ٣) (س +١) = ٥

[٢٩] (س +٨) (س – ٣) = ٣

[٣٠] (س+٣)^{٢} – ٤٩ = ٠

[٣١] (س – ١)^{٢} + س = ٣

[٣٢] (س+٣)^{٢} +٣ (س+٣) – ١٠ = ٠

[٣٣] (س – ٢)^{٢} = ٨١

[٣٤] س (س – ٣) = ٥

[٣٥] (س +٥)^{٢} – ٩ = ٠

[٣٦] س^{٢} – ١٥ = ٢

[٣٧] س^{٢} = ٢ (٣س – ٤)

[٣٨] ٤ س^{٢} = ٤٩

==

س٢ : أكمل ما يلى :-

(١) مجموعة حل المعادلة س (س – ٧) = ٠ فى ح هى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة (س – ١) (س +٥) = ٠ فى ح هى ....

(٣) جذرا المعادلة س^{٢} = س هما .... ، ....

(٤) إذا كان العدد ٣ أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + س – جـ = ٠ فإن جـ = ...

(٥) المعادلة التى جذراها -٤ ، ٣ هى ....

تطبيقات على حل المعادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبرياً

ملاحظات

(١) العدد س مربعه $س^٢$ وضعفه ٢ س
(٢) العدد س مكعبه $س^٣$ وثلاثة امثاله ٣س
(٢) إذا كان عمر أحمد الان هو س
فعمره بعد ٣ سنوات هو : س + ٣
وعمره قبل ٥ سنوات هو : س – ٥
(٢) عددان أحدهما (يزيد ، يقل ، الفرق بينهما) عن الآخر بمقدار ٢ نفرضهما س ، س + ٢
(٤) عددان فرديان متتاليان (زوجيان متتاليان) هما : س ، س + ٢

١ عدد صحيح موجب مربعه يزيد عن أربعة أمثاله بمقدار ٢١ أوجد هذا العدد

الحل :

نفرض أن العدد = س
مربعه = $س^٢$ أربعة أمثاله = ٤س
$س^٢$ – ٤ س = ٢١
$س^٢$ – ٤ س – ٢١ = ٠
(س – ٧) (س + ٣) = ٠
س = ٧ أو س = -٣
(مرفوض)
∴ العدد = ٧

٢ عدد حقيقى إذا أضيف إليه مربعه كان الناتج ١٢ أوجد العدد .

الحل :

نفرض العدد = س ، مربعه = $س^٢$
$س^٢$ + س = ١٢
$س^٢$ + س – ١٢ = ٠
(س – ٣) (س + ٤) = ٠
س – ٣ = ٠ س + ٤ = ٠
س = ٣ س = – ٤
العدد = ٣ أو – ٤

===

٣ عدد صحيح موجب مربعه يزيد عن ضعفه بمقدار ٨ أوجد هذا العدد

الحل :

نفرض أن العدد = س مربعه = $س^٢$
ضعفه = ٢س
$س^٢$ – ٢ س = ٨
$س^٢$ – ٢ س – ٨ = ٠
(س – ٤) (س + ٢) = ٠
س = ٤ أو س = -٢
∴ العدد = ٤ (مرفوض)

===

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ ومساحته ٢٨ $سم^٢$ أوجد محيطه ؟

الحل :

نفرض أن : عرضه = س ، طوله = س +٣
مساحته = ٢٨
س (س +٣) = ٢٨
$س^٢$ +٣س – ٢٨ = ٠
(س – ٤) (س +٧) = ٠
س = ٤ أو س = -٧ مرفوض
∴ عرضه = ٤ سم وطوله = ٧سم
محيطه = (٤ + ٧) × ٢
= ٢ × ١١ = ٢٢ سم

تمارين (٩)

س ١ عدد صحيح موجب إذا أضيف مربعة إلى ثلاثة أمثالة كان الناتج ١٠ فما العدد؟

س ٢: أوجد العدد النسبى الذى أربعة أمثال مربعه يساوى ٨١ ؟

س ٣: عدد صحيح موجب يزيد مربعه عن خمسة أمثاله بمقدار ٦ فأوجدهذا العدد؟

س ٤: عدد صيح موجب مربعه يزيد عنه بمقدار ٢٠ أوجد هذا العدد؟

س ٥: عددان صحيحان موجبان الفرق بينهما ٤ ومجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربهما بمقدار ٣٧ أوجد العددان ؟

س ٦ النسبة بين ثلاث أعداد نسبية موجبة كنسبة ٣ : ٤ : ٥

الأول و الثانى يزيد عن ٧ أمثال العدد الثالث بمقدار ٥٢ أوجد الأعداد الثلاثة ؟

س ٧ عددان صحيحان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما ١٠٠ أوجد العددان ؟

س ٨: عددان الفرق بينهما ٥ ومجموع مربعيهما ٧٣ أوجد العددان ؟

س ٩: عدد صحيح موجب مربعه يساوى ثلاث أمثاله فما هو هذا العدد؟

س ١٠: أوجد العددين اللذين يزيد أحدهماعن الآخر بمقدار ٢ و مجموع مربعيهما ٧٤ ؟

س ١١: مربع عمر يوسف الان يزيد عن ثلاث أمثال عمره منذ ٤ سنوات بمقدار ١٩٢ أوجد عمره الآن ؟

س ١٢: مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢ ومساحته = ٢٤ سم^2 فأوجد أبعاده؟

س ١٣: مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ ومساحته ٢٨ سم^2 أوجد محيطه ؟

س ١٤: عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما ٣٤ أوجد هذان العددان؟

س ١٥: [أ] إذا كان ٩س = $(٢٥)^2 - (٢٠)^2$ أوجد قيمة س

[ب] إذا كان ٣ س = $(٣٥)^2 - (٢٠)^2$ أوجد قيمة س

س ١٦: أكمل ما يلى :

(١) إذا كان عمر محمد الان س فإن عمره منذ ٣ سنوات هو ....

(٢) إذا كان عمر يوسف الان س فإن عمره بعد ٣ سنوات هو ....

(٣) إذا كان عمر محمد منذ ٥ سنوات = س فإن عمره الان هو ....

(٤) إذا كان عمر جنه بعد ثلاث سنوات من الان هو س فإن عمرها الان هو ....

(٥) إذا كان عمر يوسف الان يساوى س +١ فإن عمره منذ ٥ سنوات هو ....

(٦) إذا كان عمرهدير منذ ٤ سنوات يساوى س +٢ فإن عمرها الان هو...........

(٧) إذا كان عمر احمد منذ ٥ سنوات يساوى س + ٣ فإن عمره الان هو..........

(٨) إذا كان عمرهدير الان = س فإن مربع عمرها بعد ٣ سنوات من الان هو.......

(٩) ثلاث أمثال مربع العدد س هو ....

(١٠) إذا كان عمرهدير الان = س فأن ضعف عمرها منذ ٣ سنوات هو.........

القوى الصحيحة السالبة والغير سالبة

قواعد هامة

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

(٢) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

(٣) $أ^{٠} = ١$ بشرط $أ \neq$ صفر

$(ص - ٥)^{صفر} = ١$ بشرط $ص \neq ٥$

$(ص + ٣)^{صفر} = ١$ بشرط $ص \neq -٣$

(٤) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

(٥) $(أ\,ب)^{م} = أ^{م} \times ب^{م}$

(٦) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

=====================================

مثال ١ أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة :

(١) $(\sqrt{٥})^{٦} = ٥^{٣} = ١٢٥$

(٢) $(\sqrt{٢})^{٥} = ٤\sqrt{٢}$

(٣) $(\sqrt{٥})^{٧} \div (\sqrt{٥})^{٣} = (\sqrt{٥})^{٤} = ٢٥$

(٤) $(\sqrt{٣})^{-٤} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^{٤}} = \frac{١}{٩}$

(٥) $(٣)^{٤} \times (\sqrt{٢})^{-٨}$

$٨١ \times \frac{١}{(\sqrt{٢})^{٨}}$

$٨١ \times \frac{١}{١٦} = \frac{٨١}{١٦}$

(٦) $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}}$

$= (\sqrt{٣})^{٥+٣-٤} = (\sqrt{٣})^{٤} = ٩$

=====================================

(٧) $\frac{(\sqrt{٢})^{٥} \times ٣^{-٢}}{٣ \times (\sqrt{٢})^{٩}}$

$= (\sqrt{٢})^{٥-٩} \times ٣^{-٢-١} = (\sqrt{٢})^{-٤} \times ٣^{-٣}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢٧} = \frac{١}{١٠٨}$

=====================================

(٨) $\frac{٤^{س} \times ٣٢^{س}}{١٦^{س} \times ٨^{س}}$

$= \frac{٢^{٢س} \times ٢^{٥س}}{٢^{٤س} \times ٢^{٣س}} = \frac{٢^{٧س}}{٢^{٧س}} = ٢^{٠} = ١$

=====================================

(٩) $\frac{(٢٥)^{س-٣} \times (٦٢٥)^{س+١}}{(١٢٥)^{٢س-١}}$

$= \frac{(٥^{٢})^{س-٣} \times (٥^{٤})^{س+١}}{(٥^{٣})^{٢س-١}}$

$= \frac{٥^{٢س-٦} \times ٥^{٤س+٤}}{٥^{٦س-٣}}$

$= \frac{٥^{٦س-٢}}{٥^{٦س-٣}} = ٥^{٦س-٢-٦س+٣} = ٥$

المعادلات الأسية

ملاحظات

(١) إذا كان الاساس = الاساس فإن
الاس = الاس $\Leftarrow$ $أ^{ن} = أ^{م}$ $\Leftarrow$ ن = م

(٢) إذا كان الأس = الأس فإن :
الأساس = الأساس أو (الأس = صفر)

$أ^{ن} = ب^{ن}$
أ = ب ن فردى
أو أ = $\pm$ ب ن زوجى
ن = صفر ، أ $\neq \pm$ ب

(٣) $أ^{ن} = ١ \Leftarrow$ ن = صفر
الأس = صفر ، أ $\in$ ح $-$ {−١ ، ٠ ، ١}

مثال١ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) $٢^{س} = ٨$
$٢^{س} = ٢^{٣}$ $\Leftarrow$ س = ٣

==

(٢) $٥^{٢س-٣} = ٦٢٥$
$٥^{٢س-٤} = ٥^{٤}$ $\Leftarrow$ ٢س − ٤ = ٤
٢س = ٤ + ٤
٢س = ٨ ÷٢
س = ٤

==

(٣) $٢^{س-١} \times ٣^{١-س} = \frac{٩}{٤}$
$\frac{٢^{س-١}}{٣^{س-١}} = \frac{٣^{٢}}{٢^{٢}}$ $\Leftarrow$ $(\frac{٢}{٣})^{س-١} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$
$(\frac{٢}{٣})^{س-١} = (\frac{٢}{٣})^{-٢}$ $\Leftarrow$ س − ١ = −٢
س = −١

==

(٤) $س^{٥} = \frac{١}{٣٢}$
$س^{٥} = \frac{١}{٢^{٥}} = (\frac{١}{٢})^{٥}$ $\Leftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$

(٥) $(\frac{٣}{٥})^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$
$(\frac{٣}{٥})^{س+٢} = \frac{٥^{٣}}{٣^{٣}} = (\frac{٥}{٣})^{٣}$
$(\frac{٣}{٥})^{س+٢} = (\frac{٣}{٥})^{-٣}$
$\Leftarrow$ س + ٢ = −٣
س = −٣ − ٢
س = −٥

==

(٦) $(٣)^{س-٣} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$
$(\sqrt{٣})^{٢س-٦} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$
$\Leftarrow$ ٢س − ٦ = س + ٥
٢س − س = ٥ + ٦
س = ١١

==

(٧) $٧^{٤-٢س} = ١$
$\Leftarrow$ ٤ − ٢س = ٠
−٢س = −٤ ÷ −٢
س = ٢

==

(٨) $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٩$
$(\sqrt{٣})^{س-١} = (\sqrt{٣})^{٤}$
$\Leftarrow$ س − ١ = ٤
س = ٤ + ١
س = ٥

==

(٩) $٤^{س-١٠} = \frac{١}{١٦}$
$٤^{س-١٠} = \frac{١}{٤^{٢}} = ٤^{-٢}$
$\Leftarrow$ س − ١٠ = −٢
س = −٢ + ١٠
س = ٨

(١٠) إذا كان $\frac{٨^{س} \times ٩^{س}}{١٨^{س}} = ٦٤$ أوجد قيمة $٤^{-س}$

$\frac{٨^{س} \times ٩^{س}}{١٨^{س}} = \frac{٢^{٣س} \times ٣^{٢س}}{٢^{س} \times ٣^{٢س}}$

$= ٢^{٣س - س} = ٢^{٢س}$

$٢^{٢س} = ٦٤ = ٢^{٦}$

$٢س = ٦ \div ٢$

$س = ٣$

$٤^{-س} = ٤^{-٣} = \frac{١}{٤^{٣}} = \frac{١}{٦٤}$

==

مثال ٢ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان $٣^{س} = ٢٧$ فإن س = ...

$٣^{س} = ٢٧$

$٣^{س} = ٣^{٣} \Leftarrow س = ٣$

==

(٢) إذا كان $٢^{س} = ٥$ فإن $٨^{س} = ...$

$٨^{س} = (٢^{٣})^{س} = (٢^{س})^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$

==

(٣) إذا كان $٥^{س} = ٣$ فإن $٥^{س+٢} = ...$

$٥^{س+٢} = ٥^{س} \times ٥^{٢} = ٣ \times ٢٥ = ٧٥$

==

(٤) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س-١} = ...$

$٥^{س-١} = ٥^{س} \times ٥^{-١} = ٤ \times \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

==

(٥) إذا كان $٣^{س} = ٥$ ، $\frac{١}{٣^{ص}} = ٧$

فإن $٣^{س+ص} = ...$

$\because \frac{١}{٣^{ص}} = ٧ \quad \therefore ٣^{ص} = \frac{١}{٧}$

$٣^{س+ص} = ٣^{س} \times ٣^{ص}$

$= ٥ \times \frac{١}{٧} = \frac{٥}{٧}$

(٦) إذا كان $٢^{س} = ٣$ فإن $٨^{-س} = ...$

$٨^{-س} = (٢^{٣})^{-س} = (٢^{س})^{-٣}$

$= (٣)^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

==

(٧) إذا كان $(س - ٥)^{صفر} = ١$

فإن س ∈ ....

$\Leftarrow$ س ∈ ع - {٥}

==

(٨) نصف العدد $٢^{١٠} = ...$

$\Leftarrow \frac{٢^{١٠}}{٢} = ٢^{٩}$

==

(٩) $٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س} = ...$

$٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س} + ٤^{س}$

$= ٤^{س}(١ + ١ + ١ + ١) = ٤^{س} \times ٤ = ٤^{س+١}$

==

(١٠) إذا كان $٢^{س} = ٧$ ، $٧^{ص} = ٨$

فإن س ص = ...

$٧^{ص} = (٧)^{ص} = (٢^{س})^{ص} = ٢^{س ص} = ٨$

$٢^{س ص} = ٢^{٣}$

س ص = ٣

تمارين (١٠)

س١ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ح :

[١] $\left(\frac{٥}{٢}\right)^{س+٣} = \frac{٢٥}{٤}$

[٢] $\left(\sqrt{٢}\right)^{س-٣} = (٢)^{س-٣}$

[٣] $(س-١)^{٤} = ١٦$

[٤] $(٢)^{س-٣} = ١$

[٥] $٣^{س-١} = ١$

[٦] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣-س} = \frac{٨١}{١٦}$

[٧] $٢ \times ٤^{س+٣} = \frac{١}{٣٢}$

[٨] $٤^{س-٢} = ٨^{٣س-٥}$

[٩] $٢^{س-١} = ٣٢$

[١٠] $٣^{س-٣} = \frac{١}{٩}$

[١١] $٣^{س-٥} = ٤^{س-٥}$

س٢ إذا كان : $س = ٢$ ، $ص = \sqrt{٣}$ أوجد قيمة :

[١] $س^{-٢} ص^{-٤}$

[٢] $(س ص)^{-٥}$

[٣] $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-٣}$

س٣ أكمل ما يلى :

١ إذا كان : $٥^{س} = ١٢٥$ فإن : $س = ...$

٢ إذا كان : $٣^{س} = ٩$ فإن : $٢^{س} - ١ = ..$

٣ إذا كان : $٣^{س-١} = ١$ فإن : $س = ...$

٤ إذا كان : $٣^{س-٣} = ٣^{س٣-٥}$ فإن : $س = ...$

٥ إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : $٩^{س} = ...$

٦ إذا كان : $س = \sqrt{٧}$ ، $ص = (\sqrt{٧})^{-١}$

فإن : $س^{٥٠} ص^{٥٠} = ...$

٧ إذا كان : $٥^{س-١} = ٣^{س-١}$ فإن : $س = ...$

٨ إذا كان : $٥^{س} = ٣$ فإن $٥^{س+٢} = ...$

٩ سدس العدد $٢^{١٣} \times ٣^{١٣} = ...$

١٠ إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : $٣^{س-١} = ...$

١١ $٣^{٥} + ٣^{٥} + ٣^{٥} = ٣^{....}$

س٤ أختصر لأبسط صورة :

[١] $\frac{٩^{س} \times ٣^{س+٢}}{٢٧^{س}}$

[٢] $\frac{٢^{٢س+١} \times ١٠^{س}}{٨^{س} \times ٥^{س+١}}$

[٣] $\frac{٢٧^{س-١} \times ٨^{س}}{(٢\sqrt{٢})^{٢س} \times (٣\sqrt{٣})^{٢س}}$

[٤] $\frac{٢٧^{س} \times ٤^{س+١}}{١٢^{س} \times ٣^{٢س+١}}$

[٥] $\frac{٨^{ن-٤} \times ٦^{٧-ن} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$

[٦] $\frac{٨١^{س} \times ٦٢٥^{س}}{١٥^{٤س}}$

[٧] $\frac{(\sqrt{٢})^{-٥} \times (\sqrt{٢})^{-٤}}{(\sqrt{٢})^{١١}}$

[٨] $\frac{٨^{ن-٤} \times ٦^{٧-ن} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$

س٥ حل المعادلة :

$$\frac{(١٤)^{٢س} \times ٤^{س+١}}{٤ \times ٧^{س} \times ١٦^{س}} = ٤٩$$

س٦ إذا كان : $\frac{٦^{٢س-٣}}{٢^{س-١} \times ٣^{س-١}} = ٦$ أوجد قيمة: س

س٧ إذا كان : $\frac{٤^{٢س} \times (\sqrt{٣})^{٤س}}{٩^{س} \times ٤^{س}} = \frac{١}{١٦}$ أوجد قيمة: س

س٨ أوجد قيمة :

$$(٢)^{صفر} + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{-٨}}$$

الإحصاء

الاحتمال

التجربة العشوائية:

هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ،
ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلا

فضاء العينة : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)

مثـــ١ـال : فى تجربة ألقاء قطعة نقود مرة واحدة أكتب فضاء العينة

⟸ ف = { ص ، ك }

مثـــ٢ـال : فى تجربة ألقاء حجر نرد مرة واحدة اكتب فضاء العينة .

⟸ ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

إحتمال وقوع أى حدث ٲ ⊂ ف و يرمز له بالرمز ل (ٲ) و يكون

ل (ٲ) = عدد عناصر الحدث ٲ / عدد عناصر فضاء العينة ⟸ ل (ٲ) = ن (ٲ) / ن (ف)

ملاحظات

(١) الحدث المستحيل : هو الحدث الذى لايمكن وقوعه

ل (الحدث المستحيل) = صفر ⟸ ل (∅) = صفر

(٢) الحدث المؤكد : هو حدث جميع النواتج الممكنة ف

ل (الحدث المؤكد) = ١ ⟸ ل (ف) = ١

(٣) أحتمال أى حدث لا يقل عن الصفر ولا يزيد عن الواحد الصحيح

٠ ≤ ل (ٲ) ≤ ١ ⟸ ل (ٲ) ∈ [-١ ، ١]

(٤) إذا كان أحتمال وقوع ٲ = ل (ٲ) فإن أحتمال عدم وقوع ٲ = ١ ـ ل (ٲ)

فمثلا : إذا كان أحتمال نجاح طالب = ٠,٨

فإن أحتمال رسوبه = ١ ــ ٠,٨ = ٠,٢

(٥) أحتمال وقوع نواتج فضاء العينة = ١

إذا كان ف = { أ ، ب ، جـ } فإن : ل (ٲ) + ل (ب) + ل (جـ) = ١

مثـــال ٣ : فى تجربة القاء قطعة نقود مرة واحدة أوجد

(١) أحتمال وقوع صورة　　　　(٢) أحتمال وقوع كتابة

الحــــــــــــل

ف = { ص ، ك }

(١) أ = احتمال وقوع صورة　　أ = { ص }　　ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

(٢) ب = أحتمال وقوع كتابة　　ب = { ك }　　ل (ب) = $\frac{١}{٢}$

==

مثــال ٤ : فى تجربة ألقاء حجر نرد مرة واحدة أكتب فضاء العينة ثم عين أحتمال كلا من الاحداث الأتية

ﻫ = حدث الحصول على عدد فردى

ﻫ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ⟸ ل (ﻫ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ب = حدث الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣

ب = { ٣ ، ٦ } ⟸ ل (ب) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

جـ = حدث الحصول على أحد عوامل العدد ٦

جـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ } ⟸ ل (جـ) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

ء = حدث الحصول على عدد يقبل القسمة على ٥

ء = { ٥ } ⟸ ل (ء) = $\frac{١}{٦}$

هـ = حدث الحصول على عدد أكبر من ٦

هـ = ϕ ⟸ ل (هـ) = صفر

و = حدث الحصول عدد زوجى أولى

و = { ٢ } ⟸ ل (و) = $\frac{١}{٦}$

س = حدث الحصول على عدد أقل من ٧

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ⟸ ل (س) = ١

مثـــال : سلة بها ٢٠كرة بها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء ، ٥ كرات صفراء

فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيا أوجد أحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

(١) حمراء (٢) حمراء أو صفراء (٣) ليست صفراء

الحـــــــــل

أحتمال أن تكون الكرة حمراء = $\frac{٨}{٢٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

احتمال أن تكون الكرة حمراء أو صفراء = $\frac{١٣}{٢٠}$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست صفراء = $\frac{١٥}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

==

مثـــ٦ـــال : حقيبة بها ١٠ بطاقات مرتبة من ١ إلى ١٠ فإذا سحبت منها بطاقة عشوائياً فأوجد :

١ ــ إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً فردياً

أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ⟸ ل (أ) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ ــ إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً أولياً

ب = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ⟸ ل (ب) = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

٣ ــ إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٣

حـ = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ⟸ ل (حـ) = $\frac{٣}{١٠}$

تمـــــارين على الاحصاء

١) فصل دراسى به ٤٠ طالب نجح منهم ٣٠ طالب فى الرياضيات ، ٢٤ طالب فى العلوم ، ٢٠ طالب فى المادتين فإذا أختير طالب عشوائياً فأوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار

أ) ناجحاً فى الرياضيات ب) راسباً فى العلوم حـ) راسباً فى المادتين

٢) صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء ، ٥ كرات سوداء كلها متماثلة إلا من حيث اللون فإذا سحبت كرة واحدة عشوائياً فإوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

أ) بيضاء ب) حمراء أو سوداء حـ) ليست سوداء

٣) صندوق به كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٦ سحبت كرة عشوائياً فما إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة تحمل :

أ) عدد يقبل القسمة على ٦ ب) عدد أولى حـ) عدد لا يقبل القسمة على ٢

٤) سلة بها ٢٥كرة منها ١٠ كرات حمراء و ٩ خضراء و ٦ كرات بيضاء فإذا سحبت كرة واحدة عشوائيا أوجد أحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

١ـ حمراء ٢ – بيضاء ٣ – خضراء ٤ ـ ليست حمراء ٥ـ حمراء أو خضراء

٥) من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٥ } كون عدداً مكون من رقمين مختلفين ثم أوجد كلاً من الأحداث الآتية :

أ) حدث أن يكون رقم العشرات فردياً

ب) حدث أن يكون رقم العشرات زوجياً

حـ) حدث أن يكون مجموع الرقمين ٧

ء) حدث أن يكون حاصل ضرب الرقمين ١٥

س أكمل كلاً مما يأتى

(١) احتمال الحدث المستحيل = ...

(٢) احتمال الحدث المؤكد = ...

(٣) إذا كان احتمال وقوع حدث معين =٠,٣ فإن احتمال عدم وقوع هذا الحدث = ...

(٤) عند القاء قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة = ...

(٥) إذا كان إحتمال نجاح أحد التلاميذ ٨٠٪ فإن إحتمال رسوبه = ...

(٦) سلة بها ٤٨ كرة فإذا كان إحتمال سحب كرة حمراء يساوى $\frac{٥}{٨}$ فإن عدد الكرات الحمراء فى السلة = ...

(٧) فصل به ٢١ ولد ، ١٥ بنتا فإذا أختير أحد التلاميذ عشوائيا فإن أحتمال أن تكون بنتا يساوى ....

(٨) إحتمال أى حدث ∋ [..... ، .....]

(٩) عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن إحتمال ظهور عدد زوجى = ...

هندسة الثاني الاعدادي

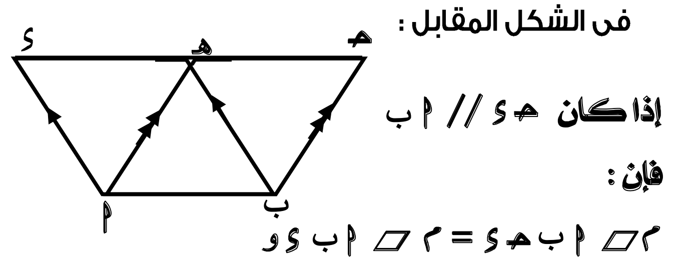


تساوي مساحتي متوازيا اضلاع او مثلثين

نظرية ١

سطحا متوازيي الأضلاع المشتركين في القاعدة و المحصورين بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل هذه القاعدة متساويان في المساحة

فى الشكل المقابل :



إذا كان هـ ء // أ ب

فإن :

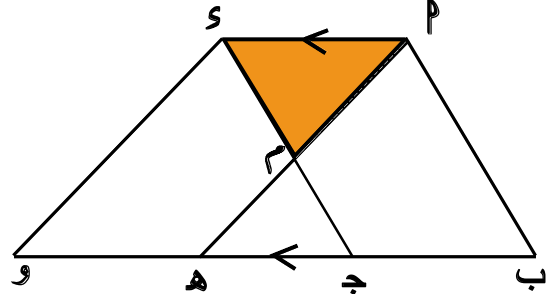
م ▱ أ ب هـ ء = م ▱ أ ب ء و

مثال ١ : فى الشكل المقابل: أ ء // ب و

أ ب جـ ء ، أ هـ و ء متوازيا أضلاع

برهن أن :

مساحة الشكل أ ب جـ م = مساحة الشكل ء و هـ م



البرهان

∵ ▱ أ ب جـ ء ، ▱ أ هـ و ء

مشتركان فى القاعدة أ ء ، أ ء // ب و

∴ م ▱ أ ب جـ ء = م ▱ أ هـ و ء

بحذف م Δ أ م ء من الطرفين

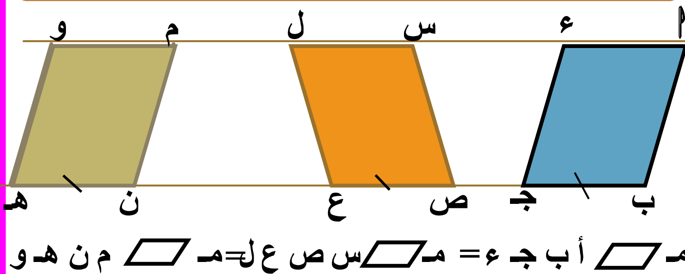
∴ م الشكل أ ب جـ م = م الشكل ء و هـ م

نتائج على النظرية

(١) مساحة متوازي الأضلاع تساوى مساحة المستطيل المشترك معه في القاعدة و المحصور معه بين مستقيمين متوازيين

(٢) مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

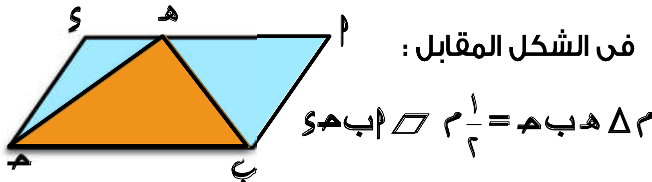
(٣) متوازيات الأضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين و قواعدها التى على أحد هذين المستقيمين متساوية في الطول تكون متساوية في المساحة



م ▱ أ ب جـ ء = م ▱ س ص ع ل = م ▱ م ن هـ و

(٤) مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع المشترك معه في القاعدة و المحصور معه بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل هذه القاعدة المشتركة

فى الشكل المقابل :



م Δ هـ ب جـ = $\frac{1}{2}$ م ▱ أ ب جـ ء

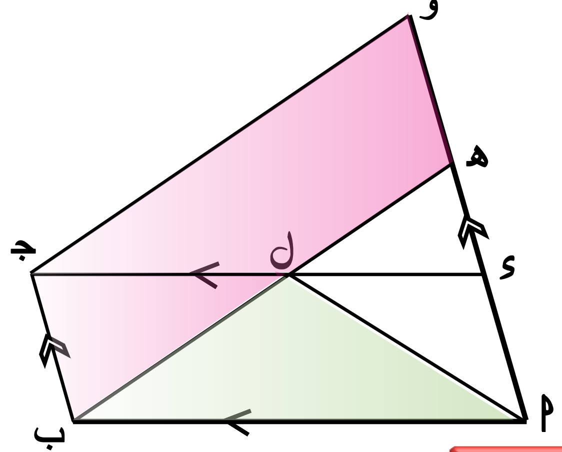
(٥) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

(١) في الشكل المقابل :

و أ // ب جـ ، أ ب جـ ء ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع

أثبت أن :

م Δ أ ب ل = $\frac{١}{٢}$ م ▱ هـ ب جـ و



البرهان

∵ ▱ أ ب جـ ء ، ▱ هـ ب جـ و

مشتركان في القاعدة ب جـ ، ب جـ // و أ

∴ مساحة ▱ أ ب جـ ء = مساحة ▱ هـ ب جـ و (١)

∵ Δ أ ب ل ، ▱ أ ب جـ ء

مشتركان في القاعدة أ ب ، أ ب // ء جـ

∴ مساحة Δ أ ب ل = $\frac{١}{٢}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء (٢)

من ١ ، ٢

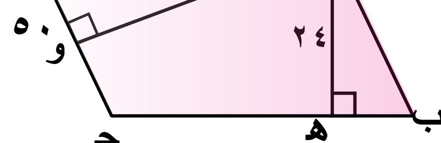
∴ مساحة Δ أ ب ل = $\frac{١}{٢}$ مساحة ▱ هـ ب جـ و

(٢) في الشكل المقابل: أ هـ ⊥ ب جـ ، أ و ⊥ جـ ء

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، أ و = ٣٠ سم

، جـ ء = ٥٠ سم ، أ هـ = ٢٤ سم

أوجد طول ب جـ



مساحة ▱ = طول القاعدة × الارتفاع

مساحة ▱ = جـ ء × أ و

= ٥٠ × ٣٠ = ١٥٠٠ سم²

مساحة ▱ = ب جـ × أ هـ

= ب جـ × ٢٤ = ١٥٠٠ سم²

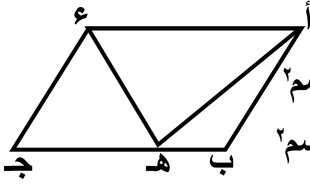
ب جـ = ١٥٠٠ ÷ ٢٤ = ٦٢٫٥ سم

تمارين (١)

(١) في الشكل المقابل

إذا كان م ▱ أ ب جـ ء = ٥٠ سم²

فإن م Δ أ هـ ء = ... سم²

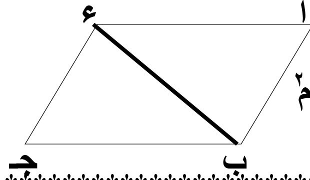


****

(٢) في الشكل المقابل

إذا كان م Δ ب جـ ء = ٢٢ سم²

فإن م ▱ أ ب جـ ء = ... سم²

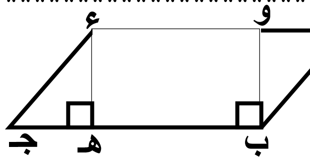


****

(٣) في الشكل المقابل

إذا كان مساحة متوازي الاضلاع = ١٥ سم²

فإن مساحة المستطيل و ب هـ ء = ...



****

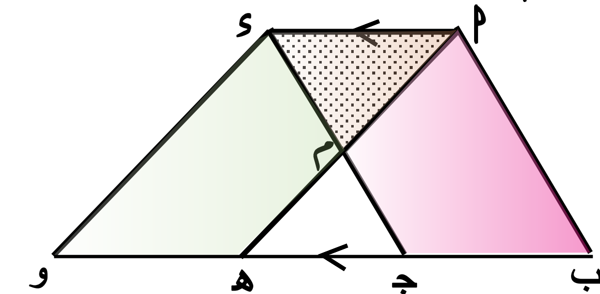
(٤) في الشكل المقابل أ ء // ب و

أ ب جـ ء ، أ هـ و ء متوازيا أضلاع

برهن أن :

(١) م الشكل أ ب جـ م = م الشكل و ء هـ م

(٢) م Δ أ ب هـ = م Δ ء جـ و



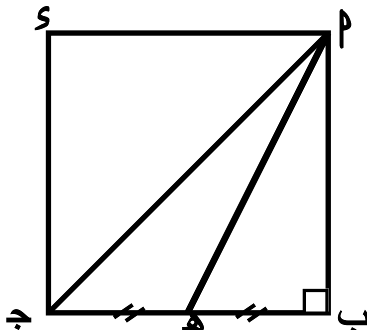
****

(٥) في الشكل المقابل

أ ب جـ ء مربع محيطه = ٢٤ سم ، هـ منتصف ب جـ

أوجد طول كل من

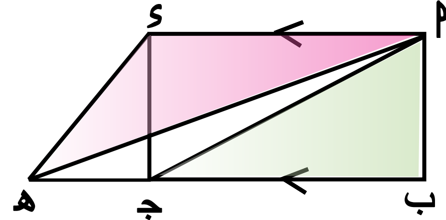
أ ب ، هـ جـ ، مساحة Δ أ هـ جـ



(٦) فى الشكل المقابل :

ﻫ ب جـ ء مستطيل ، ﻫ ∈ $\overleftarrow{بجـ}$

برهن أن : م Δ ء ﻫ = م Δ ﻫ بجـ



****

(٧) فى الشكل المقابل :

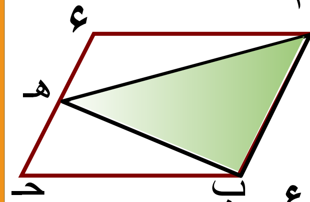
مساحة Δ ﻫ ع ﻫ = ١٥ سم²

، مساحة Δ ب ﻫ حـ = ١٢ سم²

أحسب :

مساحة سطح كل من :

Δ ﻫ ب ﻫ ، ▱ ﻫ ب حـ ء



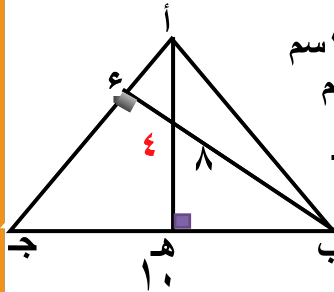
****

(٨) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه ب جـ = ١٠ سم

أ ﻫ = ٤ سم ، ب ء = ٨ سم

أوجد م Δ أ ب جـ ، طول أ جـ



****

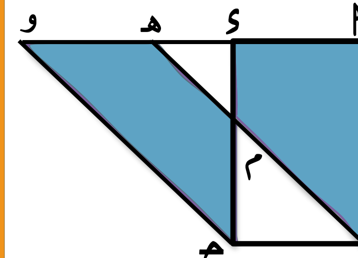
(٩) فى الشكل المقابل :

ﻫ ب ﻫ ء مستطيل ،

$\overline{بـﻫ}$ // $\overline{ﻫ و}$

أثبت أن :

م الشكل ﻫ ب م ء = م الشكل و ﻫ م ﻫ



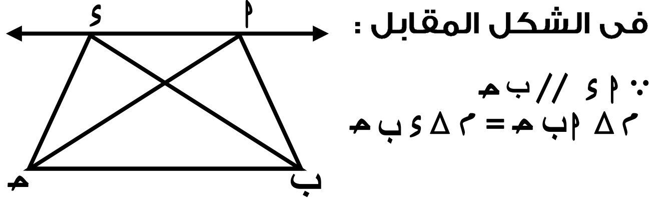
نظرية ٢

المثلثان المرسومان على قاعدة واحدة و رأساهما على مستقيم يوازى هذه القاعدة يكونان متساويان فى المساحة

فى الشكل المقابل :

∵ ﻫ ء // ب ﻫ

م Δ ﻫ ب ﻫ = م Δ ء ب ﻫ



****

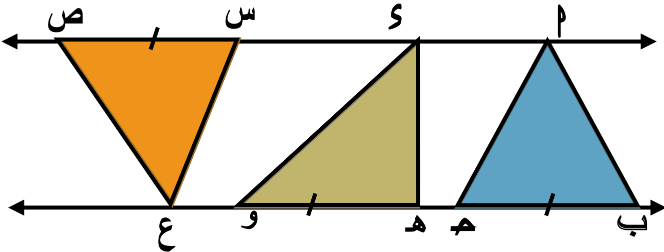
نتائج على النظرية

(١) المثلثات التى قواعدها متساوية فى الطول و المحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية فى المساحة

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ﻫ ء // ب ﻫ ، ب ﻫ = ﻫ و = س ص

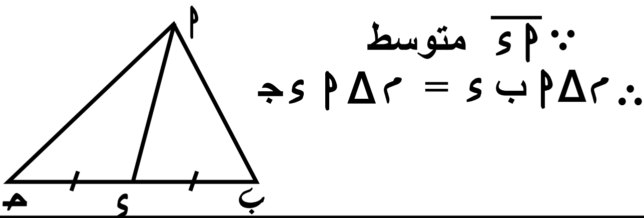
⟸ م Δ ﻫ ب ﻫ = م Δ ء ﻫ و = م Δ س ص ع



(٢) متوسط المثلث يقسم سطحه إلى سطحى مثلثين متساويان فى المساحة

∵ $\overline{ﻫ ء}$ متوسط

∴ م Δ ﻫ ب ء = م Δ ﻫ ء جـ



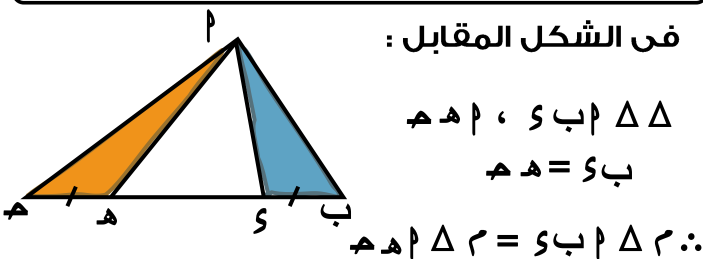
(٣) المثلثات التى قواعدها متساوية و على مستقيم واحد و مشتركة فى الرأس تكون متساوية فى مساحة

فى الشكل المقابل :

Δ Δ ﻫ ب ء ، ﻫ ﻫ ﻫ

ب ء = ﻫ ﻫ

∴ م Δ ﻫ ب ء = م Δ ﻫ ﻫ ﻫ



(١) فى الشكل المقابل :

س ل // ص ع

س ع ∩ ص ل = { م }

إثبت أن

م Δ س م ص = م Δ ل م ع

البرهان

∵ س ل // ص ع

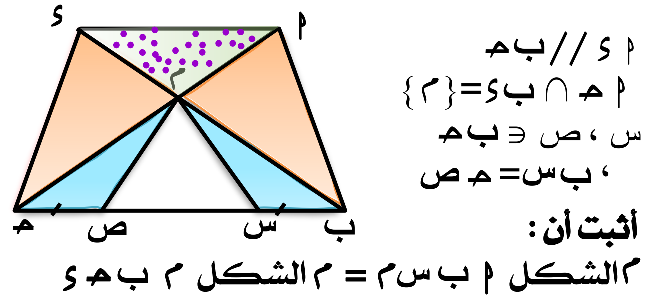
∴ م Δ س ص ع = م Δ ل ص ع

بطرح م Δ م ص ع من الطرفين

∴ م Δ س م ص = م Δ ل م ع

****

(٢) فى الشكل المقابل :



أ ء // ب جـ

أ جـ ∩ ب ء = {م}

س ، ص ∈ ب جـ

، ب س = جـ ص

أثبت أن :

م الشكل أ ب س م = م الشكل م ب جـ ء

البرهان

∵ أ ء // ب جـ ، أ ء قاعدة مشتركة

∴ م Δ أ ب ء = م Δ أ جـ ء

بطرح م Δ أ م ء من الطرفين

∴ م Δ أ ب م = م Δ ء جـ م ـ (١)

∵ ب س = جـ ص

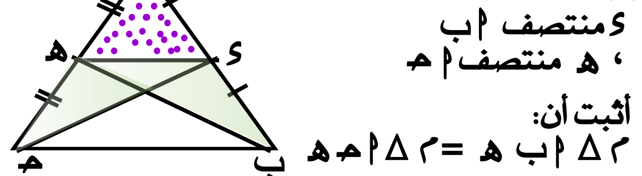
∴ م Δ م ب س = م Δ م ص جـ ــــ (٢)

بجمع ١ ، ٢ :

∴ م الشكل أ ب س م = م الشكل م ص جـ ء

****

(٣) فى الشكل المقابل :



ء منتصف أ ب

، هـ منتصف أ جـ

أثبت أن:

م Δ أ ب هـ = م Δ أ جـ هـ

البرهان

∵ ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

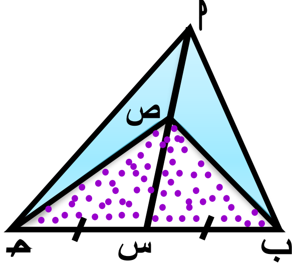
∴ ء هـ // ب جـ

∴ م Δ ء ب هـ = م Δ ء جـ هـ ــــ (١)

بإضافة م Δ أ ء هـ للطرفين :

∴ م Δ أ ب هـ = م Δ أ جـ هـ

(٤) فى الشكل المقابل :



أ س متوسط فى Δ أ ب جـ

أثبت أن :

م Δ أ ب ص = م Δ أ جـ ص

البرهان

∵ أ س متوسط فى Δ أ ب جـ

∴ م Δ أ ب س = م Δ أ جـ س ——— (1)

∵ ص س متوسط فى Δ ص ب جـ

∴ م Δ ص ب س = م Δ ص جـ س ——— (٢)

بطرح ٢ من ١

∴ م Δ أ ب ص = م Δ أ جـ ص

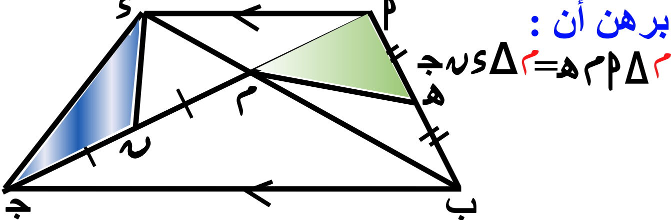
****

(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، ن منتصف $\overline{م جـ}$

برهن أن :

م Δ م أ هـ = م Δ ء ن جـ



البرهان

$\overline{ب جـ}$ // $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب جـ}$ قاعدة مشتركة

∴ م Δ أ ب جـ = م Δ ء ب جـ

بحذف م Δ ب م جـ من الطرفين

∴ م Δ أ م ب = م Δ ء م جـ ①

∵ $\overline{م هـ}$ متوسط في Δ أ م ب

∴ م Δ أ م هـ = $\frac{١}{٢}$ م Δ أ م ب ②

∵ $\overline{ء ن}$ متوسط في Δ ء جـ م

∴ م Δ ء ن جـ = $\frac{١}{٢}$ م Δ ء جـ م ③

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ م Δ أ م هـ = م Δ ء ن جـ

تمارين (٢)

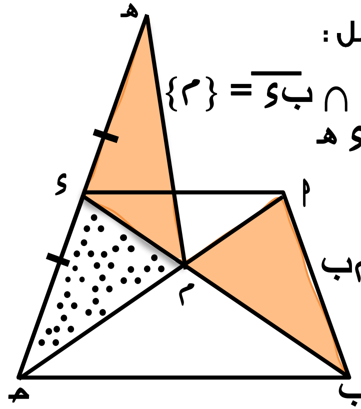
(١) فى الشكل المقابل :

أ ء // ب هـ ، أ هـ ∩ ب ء = {م}

، هـ ∈ جـ ء ، جـ ء = ء هـ

أثبت أن :

م Δ ء م هـ = م Δ أ م ب



****

(٢) فى الشكل المقابل:

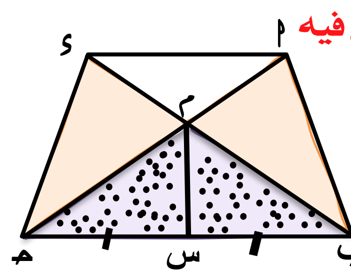
أ ب هـ ء شكل رباعي فيه أ ء // ب هـ

، س منتصف ب هـ

تقاطع قطراه فى م

أثبت أن:

م الشكل أ ب س م = م الشكل ء هـ س م



****

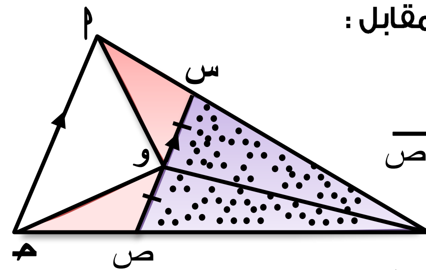
(٣) فى الشكل المقابل :

أ هـ // س ص

، و منتصف س ص

أثبت أن :

م Δ أ ب و = م Δ هـ ب و



****

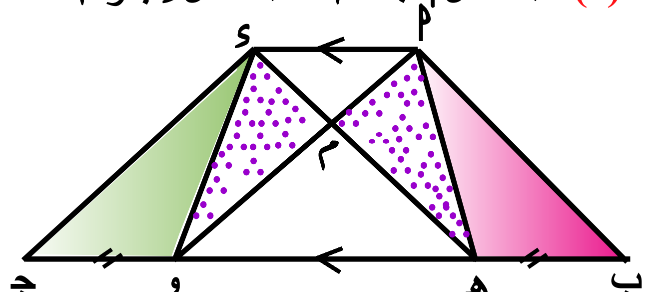
(٤) فى الشكل المقابل :

ب هـ = جـ و ، أ ء // ب جـ

برهن أن :

(١) م Δ أ م هـ = م Δ ء م و

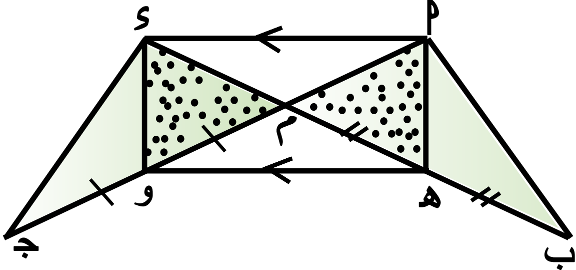
(٢) م الشكل أ ب هـ م = م الشكل ء جـ و م



(٥) فى الشكل المقابل :

أ ء // هـ و ، هـ منتصف ب م ، و منتصف م جـ

برهن أن : م Δ أ ب م = م Δ ء جـ م

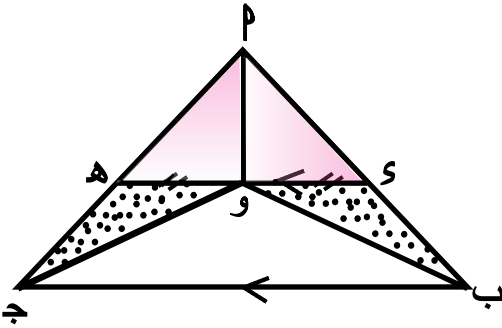


****

(٦) فى الشكل المقابل :

ء هـ // ب جـ ، و منتصف ء هـ

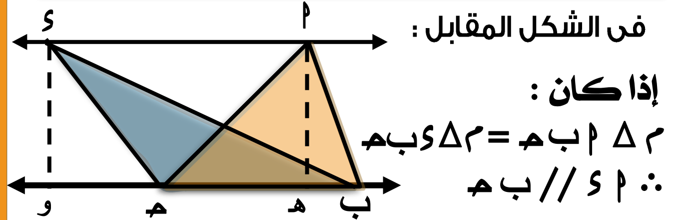
برهن أن : م Δ أ ب و = م Δ أ جـ و



عكس النظرية ٢

المثلثان المتساويان فى مساحتيهما و المرسومان على قاعدة واحدة و فى جهة واحدة منها يكون رأساهما على مستقيم يوازى هذه القاعدة

فى الشكل المقابل :



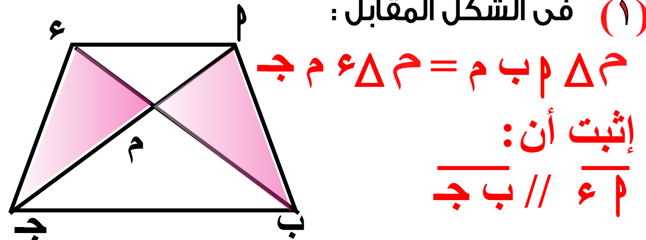
إذا كان :

م Δ ا ب هـ = م Δ ء ب هـ

∴ ا ء // ب هـ

****

(١) فى الشكل المقابل :



م Δ ا ب م = م Δ ء م جـ

إثبت أن :

ا ء // ب جـ

البرهان

∵ م Δ ا ب م = م Δ ء م جـ

بأضافة : م Δ ب م جـ

∴ م Δ ا ب جـ = م Δ ء ب جـ

، ب جـ قاعدة مشتركة

∴ ا ء // ب جـ

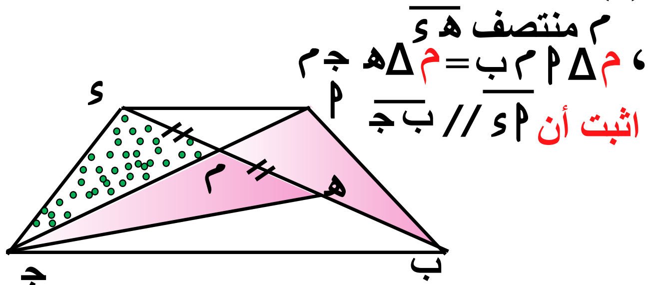
****

(٢) فى الشكل المقابل :

م منتصف هـ ء

، م Δ ا م ب = م Δ هـ جـ م

اثبت أن ا ء // ب جـ



البرهان ∵ جـ م متوسط في Δ جـ هـ ء

∴ م Δ ء م جـ = م Δ هـ جـ م ①

، ∵ م Δ ا م ب = م Δ هـ جـ م ②

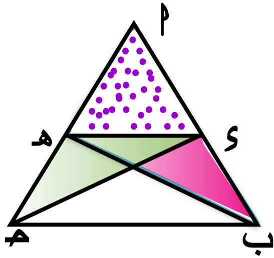
من ١ ، ٢ ∴ م Δ ا م ب = م Δ ء م جـ

بإضافة م Δ ا م ء للطرفين

∴ م Δ ا ء ب = م Δ ا ء جـ

∴ ا ء // ب جـ ، ا ء قاعدة مشتركة

(٣) فى الشكل المقابل :



م Δ ا ء جـ = م Δ ا هـ ب

أثبت أن

ء هـ // ب جـ

البرهان

∵ م Δ ا ء جـ = م Δ ا ب هـ

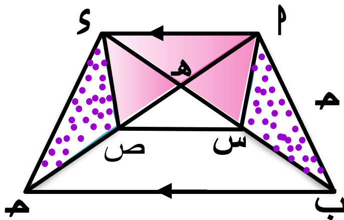
بطرح م Δ ا ء هـ من الطرفين

∴ م Δ ء ب هـ = م Δ ء هـ جـ

∴ ء هـ // ب جـ ء هـ قاعدة مشتركة

****

(٤) فى الشكل المقابل :



ا ء // ب جـ ،

م Δ ا س ب = م Δ ء ص جـ

أثبت أن :

س ص // ا ء

البرهان

∵ ا ء // ب جـ ، ا ء قاعدة مشتركة

∴ م Δ ا ب ء = م Δ ا جـ ء ـــ (١)

∵ م Δ ا س ب = م Δ ء ص جـ ـــــــ (٢)

بطرح ٢ من ١ ⟸

∴ م Δ ا س ء = م Δ ا ص ء

، ا ء قاعدة مشتركة

∴ س ص // ا ء

تمارين (٣)

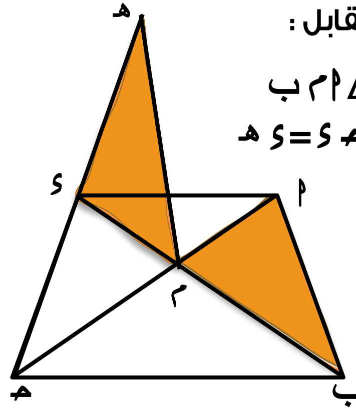
(١) فى الشكل المقابل :

م Δ م ء هـ = م Δ م أ ب

، هـ ∈ $\overrightarrow{جـ ء}$ بحيث ، جـ ء = ء هـ

أثبت أن :

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$



****

(٢) فى الشكل المقابل :

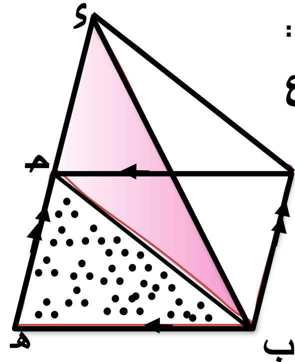
أ ب هـ جـ متوازي أضلاع

ء ∈ $\overline{هـ جـ}$ بحيث

م Δ ء ب جـ = م Δ هـ ب جـ

أثبت أن :

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$

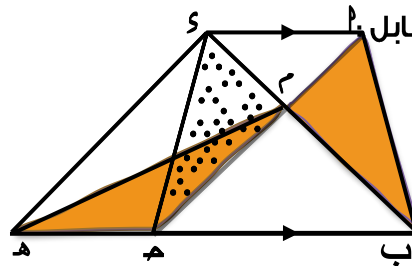


****

(٣) فى الشكل المقابل

$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$

أجـ ∩ ب ء = {م}



، م Δ أ ب م = م Δ هـ جـ م

أثبت أن :

$\overline{ء هـ}$ // $\overleftrightarrow{أ جـ}$

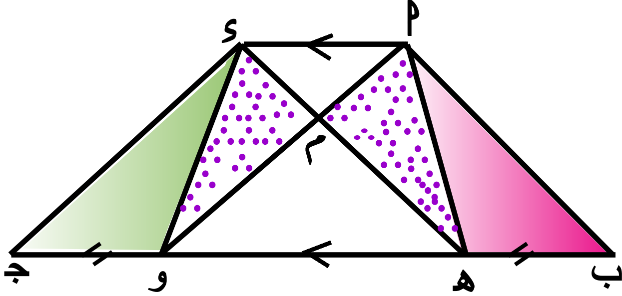
(٤) فى الشكل المقابل :

م الشكل أ ب هـ م = م الشكل ء جـ و م ، ب هـ = جـ و

برهن أن :

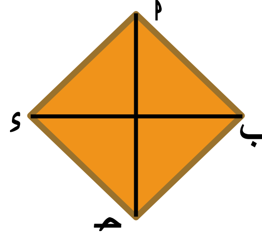
(١) م Δ أ هـ م = م Δ ء م و

(٢) $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$



مساحة بعض الأشكال الهندسية

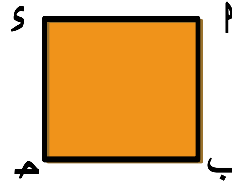
مساحة المعين



مساحة المعين = طول الضلع × الإرتفاع

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى القطرين

مساحة المربع



مساحة المربع = مربع طول ضلعه = ل^2

مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره = $\frac{1}{2}$ م^2

مساحة شبه المنحرف

= $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= القاعدة المتوسطة × الارتفاع

القاعدة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين

ملاحظات

(١) زاويتا القاعدة فى شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان

(٢) قطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان

أوجد مساحة كلاً من الأشكال الآتية :

(١) معين طول ضلعه = ١٠ سم وارتفاعه ٤ سم أوجد مساحته

الحل :

مساحة المعين = طول ضلعه × أرتفاعه

= ١٠ × ٤ = ٤٠ سم^2

****

(٢) معين طولا قطريه ١٠ سم، ٦ سم أوجد مساحته

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٦ = ٣٠ سم^2

****

(٣) مربع طول قطره ١٠ سم أوجد مساحته

الحل :

مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

= $\frac{1}{2}$ × ١٠٠ = ٥٠ سم^2

****

(٤) مربع مساحته = ٣٢ سم^2 أوجد طول قطره

الحل :

مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

$\frac{1}{2}$ س^2 = ٣٢ ⟸ س^2 = ٦٤

⟸ س = $\sqrt{٦٤}$ = ٨سم

****

(٥) معين مساحته ٤٠ سم^2 و طول أحد قطريه ٨ سم أوجد طول قطره الآخر

الحل :

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى القطرين

= $\frac{1}{2}$ × ٨ × س = ٤٠

٤ × س = ٤٠ ÷ ٤

⟸ س = ١٠ سم

****

(٦) احسب مساحة شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة ٨ سم ارتفاعه ٥ سم

الحل :

مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

= ٨ × ٥ = ٤٠ سم^2

****

(٧) احسب مساحة شبه منحرف طولا قاعدتيه ٥ سم ، ٩ سم و ارتفاعه ٦ سم

الحل :

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ (٥ + ٩) × ٦ = ٤٢ سم^2

(٨) شبه منحرف مساحته ٤٥٠ سم^2 و طولا قاعدتيه المتوازيتين ٢٤ سم ، ١٢سم أوجد ارتفاعه

الحل:

مساحة شبه المنحرف = ٤٥٠

$= \frac{١}{٢}(٢٤ + ١٢) \times$ س $= ٤٥٠$

$١٨ \times$ س $= ٤٥٠ \quad \div ١٨$

س = ٢٥

****

(٩) شبه منحرف مساحته ١٠٨ سم^2 و طول أحد قاعدتيه المتوازيتين ١٥سم ، ارتفاعه ٨ سم أوجد طول قاعدته الأخرى

الحل:

مساحة شبه المنحرف = ١٠٨

$= \frac{١}{٢}($س $+ ١٥) \times ٨ = ١٠٨$

$٤ \times ($س $+ ١٥) = ١٠٨ \quad \div ٤$

س + ١٥ = ٢٧

س = ٢٧ - ١٥

س = ١٢

****

(١٠) شبه منحرف مساحته ١٨٠ سم^2 و ارتفاعه ١٢سم و النسبة بين طولى قاعدتيه المتوازيتين ٣:٢ فما طول كل منهما ؟

نفرض طولى القاعدتين ٣س ، ٢س

مساحة شبه المنحرف = ١٨٠

$= \frac{١}{٢}(٣$س $+ ٢$س$) \times ١٢ = ١٨٠$

$٦ \times (٣$س $+ ٢$س$) = ١٨٠$

٦×٥س $= ١٨٠$

٣٠س $= ١٨٠ \quad \div ٣٠$

س = ٦

طول القاعدة الكبرى = ٣س = ٣×٦ = ١٨ سم

طول القاعدة الصغرى = ٢س = ٢×٦ = ١٢ سم

تمارين (٣)

س١) أكمل ما يأتى

(١) مربع طول ضلعه = ٦سم يكون مساحته= .... سم

(٢) مربع مساحته = ٦٤ سم^2 يكون محيطه= .... سم

(٣) مربع مساحته = ٢٥ سم^2 يكون محيطه= .... سم

(٤) مربع محيطه = ١٢ سم^2 يكون مساحته = ...سم^2

(٥) معين طولا قطريه ٨سم ، ١٢ سم تكون مساحته تساوى ...... سم^2

(٦) متوازى أضلاع طولا ضلعين متجاورين فيه ٨ سم ، ٦ سم ، وارتفاعه الأصغر ٣ سم فإن مساحته = ... سم^2

(٧) معين طولاقطريه ١٠ سم ، ٨ سم تكون مساحته..................

(٨) إذ كانت مساحة مثلث ٢٤سم^2 وارتفاعه ٦ سم فإن طول قاعدته المناظرة لهذا الارتفاع = ...

(٩) معين مساحته = ٢٨سم ، طول احد قطريه = ٧ سم فان طول قطره ....

(١٠) معين مساحته = ٦٠ سم ،طول قاعدته ١٠ سم يكون أرتفاعه ....

(١١) شبه منحرف مساحته = ٤٥ سم^2 طول قاعدته المتوسطة = ٩سم يكون أرتفاعه ....

(١٢) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين = ٣ سم ،٧سم ارتفاعه ٤سم تكون مساحته = ... سم٢

(١٣) شبه منحرف طول احدى قاعدتيه المتوازيتين ٦سم وطول قاعدته المتوسطة ١٠ سم تكون قاعدته الاخرى ......

(١٤) متوازى الأضلاع الذى طولا ضلعيه المتجاورين ٩ ، ٦ وإرتفاعه الأصغر ٤ سم تكون مساحته ....
ويكون إرتفاعه الأكبر = ...

س٢ أوجد مساحة كلا من الأشكال الآتية :

(١) أوجد مساحة سطح معين طولا قطريه ١٥ سم ، ١٢ سم

(٢) أوجد طول القاعدة المتوسطة لشبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين ٧ سم ، ١٥ سم

(٣) أوجد مساحة سطح معين محيطه ٤٠ سم ، و إرتفاعه ٧ سم

(٤) شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة ١٢ سم ، طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين ٩ سم
أوجد طول القاعدة الأخرى

(٥) أوجد مساحة شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين ٧ سم ، ١٣ سم و إرتفاعه ٥ سم

(٦) معين طولا قطريه ١٦ سم ، ١٢ سم ، وطول ضلعه ١٠ سم أوجد إرتفاعه

(٧) شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة ٩ سم ، مساحة سطحه ٦٣ سم^{2} أوجد إرتفاعه

(٨) شبه منحرف إرتفاعه ١٠ سم ، مساحة سطحه ١٥٠ سم^{2} أوجد طول قاعدته المتوسطة

(٩) مربع مساحته ٤٩ سم^{2} أوجد محيطه

(١٠) إذا كانت مساحة مربع طول قطره ١٠ سم تساوى مساحة شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة ١٠ سم أوجد إرتفاع شبه المنحرف

(١١) إذا كانت مساحة مربع طول قطره ١٠ سم تساوى مساحة مستطيل أحد بعديه ١٠ سم
أوجد محيط المستطيل

(١٢) شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة ضعف طول قاعدته الصغرى و إرتفاعه يساوى طول قاعدته الكبرى فإذا كانت مساحته ٥٤ سم^{2} أوجد طول قاعدته الصغرى و إرتفاعه

(١٣) قطعة أرض على شكل شبه منحرف مساحته ٣٤٣ سم^{2} و إرتفاعه ٧ سم والنسبة بين طولى

التشابه

تعريف يقال لمضلعين أنهما متشابهين إذا تحقق ما يلي :

(١) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس

(٢) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

ملاحظات

(١) تسمى النسبة الثابتة بين أطوال الأضلاع نسبة التكبير أو نسبة التصغير

نسبة التصغير < ١ ، نسبة التكبير > ١

(٢) إذا كانت نسبة التكبير = ١ فإن المضلعين متطابقين

(٣) كل المضلعات المنتظمة التى لها نفس عدد الأضلاع تكون متشابهة

(٤) النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين أى طولى ضلعين متناظرين

(٥) يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة

(٦) المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

(٧) المضلعان المتطابقان متشابهان والعكس غير صحيح

ملاحظة

إذا كان : المضلع س ص ع ل ~ المضلع حـ ء هـ و فإن :

ق (∠س) = ق (∠حـ)

ق (∠ص) = ق (∠ء)

ق (∠ع) = ق (∠هـ)

ق (∠ل) = ق (∠و)

س ص / حـ ء = ص ع / ء هـ = ع ل / هـ و = ل س / و حـ = مقدار ثابت

تعريف يتشابه المثلثان إذا تحقق أحد الشرطين التاليين :

(١) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس

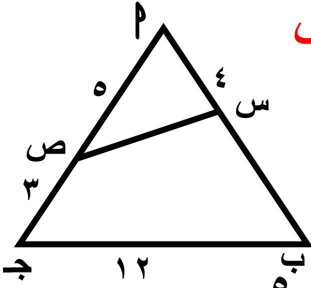
(٢) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

---

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كان: Δ م س ص ~ Δ م جـ ب

أوجد طول س ب ، س ص



البرهان

Δ م س ص ~ Δ م جـ ب

∴ م س / م جـ = س ص / جـ ب = م ص / م ب

∴ ٤ / ٨ = س ص / ١٢ = ٥ / أ ب

∴ س ص = (٤ × ١٢) / ٨ = ٦ سم

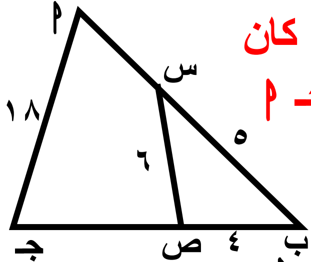
م ب = (٥ × ٨) / ٤ = ١٠ سم ⟸ س ب = ٦ سم

****

(٢) فى الشكل المقابل : إذا كان

Δ ب س ص ~ Δ ب جـ م

أوجد : م س ، ص جـ



البرهان

∵ Δ ب س ص ~ Δ ب جـ م

∴ ب س / ب جـ = س ص / م جـ = ب ص / ب م

∴ ٥ / ب جـ = ٦ / ١٨ = ٤ / م ب

∴ ب جـ = (٥ × ١٨) / ٦ = ١٥ سم ⟸ ص جـ = ١١ سم

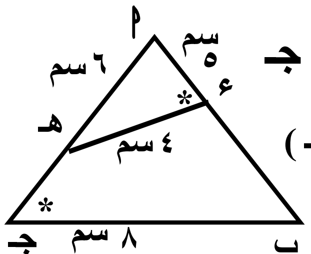
أ ب = (١٨ × ٤) / ٦ = ١٢ سم ⟸ أ س = ٧ سم

****

(٣) فى الشكل المقابل: ق (∠أ ء هـ) = ق (∠جـ)

إثبت أن: Δ م ء هـ ~ Δ م جـ ب

أوجد : م جـ



البرهان

ΔΔ م ء هـ ، م ب جـ

فيهما { م زاوية مشتركة ، ق (∠م ء هـ) = ق (∠جـ)

∴ Δ م ء هـ ~ Δ م جـ ب

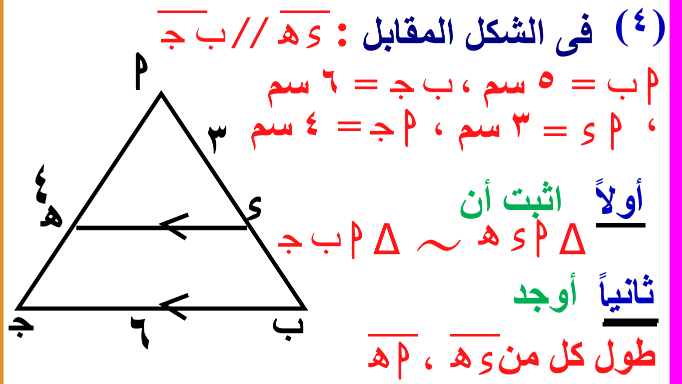
∴ م ء / م جـ = ء هـ / جـ ب = م هـ / م ب

∴ ٥ / م جـ = ٤ / ٨ = ٦ / م ب ⟸ أ جـ = (٥ × ٨) / ٤ = ١٠ سم

(٤) فى الشكل المقابل : ءهـ // ب جـ

أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم

، أ ء = ٣ سم ، أ جـ = ٤ سم



أولاً اثبت أن

Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ

ثانياً أوجد

طول كل من ءهـ ، أهـ

البرهان

∵ ءهـ // ب جـ

∴ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب) بالتناظر ①

∴ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠جـ) بالتناظر ②

∵ (∠أ) زاوية مشتركة ③

∴ Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{ب جـ} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ⟸

$\frac{٣}{٥} = \frac{ءهـ}{٦} = \frac{أهـ}{٤}$

ءهـ = $\frac{٦ \times ٣}{٥}$ = ٣,٦ سم ، أهـ = $\frac{٤ \times ٣}{٥}$ = ٢,٤ سم

****

(٥) فى لشكل المقابل: أ ء // ب جـ

أ ء = ٤ سم، ب جـ = ٨ سم

، أ هـ = ٣ سم , ء هـ = ٢ سم

ء ٤ أ ٢ ٣ هـ جـ ٨ سم ب

أولاً اثبت أن

Δ أ هـ ء ∼ Δ جـ هـ ب

ثانياً أوجد طول جـهـ ،

محيط Δ هـ ب جـ

البرهان

∵ أ ء // ب جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) بالتبادل ①

∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) بالتبادل ②

∵ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠ب هـ جـ) بالتقابل بالرأس ③

∵ Δ أ هـ ء ∼ Δ جـ هـ ب

∴ $\frac{أهـ}{جـهـ} = \frac{ءهـ}{ب هـ} = \frac{ءأ}{ب جـ} = \frac{محيط\ Δ\ أ هـ ء}{محيط\ Δ\ جـ هـ ب}$

∴ $\frac{٣}{جـهـ} = \frac{٢}{هـ ب} = \frac{٤}{٨} = \frac{٩}{محيط\ Δ\ هـ ب جـ}$

جـهـ = $\frac{٣ \times ٨}{٤}$ = ٦ سم

محيط Δ هـ ب جـ = $\frac{٩ \times ٨}{٤}$ = ١٨ سم

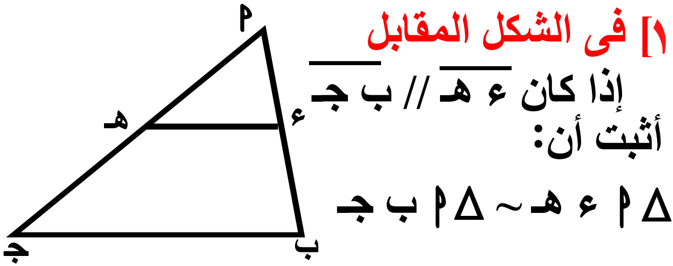
تمارين (٤)

[١] فى الشكل المقابل

إذا كان ء هـ // ب جـ

أثبت أن:

Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ



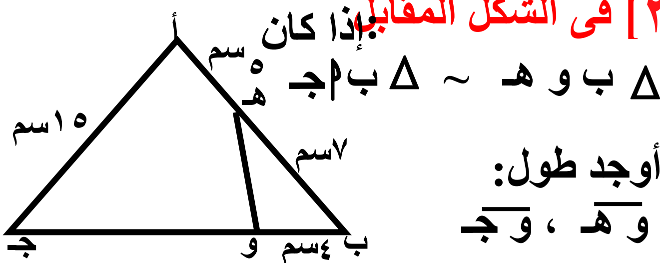
****

[٢] فى الشكل المقابل: إذا كان

Δ ب و هـ ∼ Δ أ ب جـ

أوجد طول:

و هـ ، و جـ



****

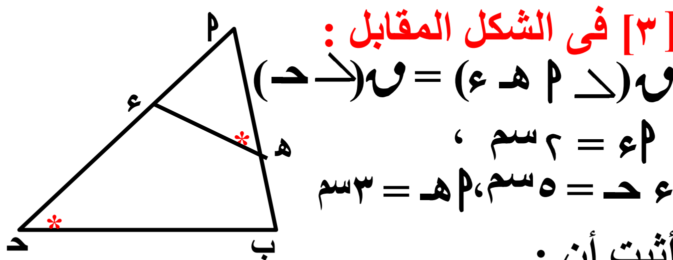
[٣] فى الشكل المقابل :

ق(∠أ هـ ء) = ق(∠حـ)

، أ ء = ٢ سم ، ء حـ = ٥ سم، أ هـ = ٣ سم

أثبت أن :

Δ أ هـ ء ∼ Δ أ حـ ب ثم أوجد طول ب هـ



****

[٤] فى الشكل المقابل: إذا كان أ ب = ٨ سم

، أ حـ = ٦ سم ، ء حـ = ٣,٦ سم

، كان Δ أ ء ب ∼ Δ حـ ء أ

فأوجد طول كل من أء ، ب ء

أ حـ ء ب

****

[٥] فى الشكل المقابل :

إذا كان Δ أ ب حـ ∼ Δ ء هـ و

أوجد قيمة : س ، ص

أ ١٢ سم س حـ ١٠ سم ب

ء ص ٤ سم و ٥ سم هـ

س٦ أكمل العبارات الاتية

١ـ المضلعان المشابهان لثالث يكونان.............

٢- المضلعان المتطابقان يكونان.............

٣- أى مضلعين.......لهما نفس العدد من..........متشابهان

٤- إذا كانت نسبة التكبير = ١ فإن المضلعان يكونان ...

٥- مثلث قياس زاويتين فيه٧٠° ، ٥٠°
ومثلث أخر قياس زاويتين فيه٧٠° ، ٦٠° فإنهما يكونان ....

٦- ....المثلثات المتساوية الاضلاع تكون متشابهة

٧- .... المربعات متشابهة

٨- مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما
١ : ٣ أوجد النسبة بين محيطيهما ....

٩- شروط تطابق مضلعين هى
- ....
- ....

١٠- شروط تشابه مضلعين هى
- ....
- ....

١١- إذا كان المضلعان متطابقان فإن نسبة التكبير = ...

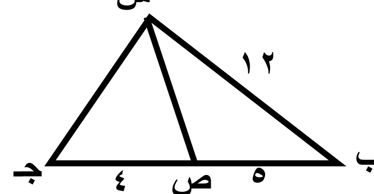
١٢- مثلثان متشابهان أطوال أضلاع أحدهما ٣سم ، ٥ سم ،٧ سم
ومحيط المثلث الاخر = ٣٠ سم فإن أطوال أضلاع المثلث الاخر هى
.... ، .... ، ....

١٣- إذا كان Δ س ص ع ~ Δ و ء هـ وبحيث كان ق(∠س) = ٥٠°
، ق(∠هـ) = ٦٠° فإن
ق(∠ء) = ... ، ق(∠ص) = ...
، ق(∠و) = ... ، ق(∠ع) = ...

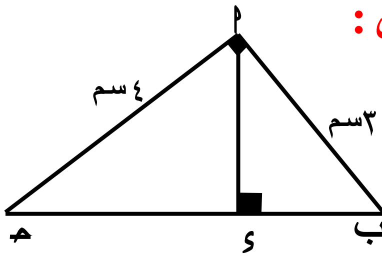
****

(٧) فى الشكل المقابل:

إذا كان Δ جـ س ص ~ Δ جـ ب س
أوجد طول : $\overline{\text{س جـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$



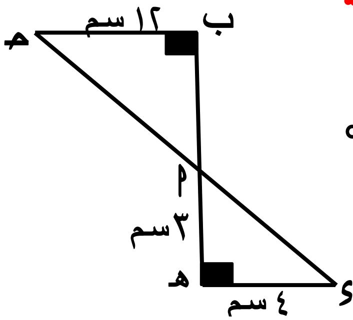
(٨) فى الشكل المقابل :



ٲب ⊥ ٲ هـ ،
ٲ ء ⊥ ب هـ
ٲب = ٣ سم ،
ٲ هـ = ٤ سم أثبت أن
(١) Δ ٲ ب ء ~ Δ هـ ب ٲ
(٢) أوجد طول ب ء ، ء هـ

****

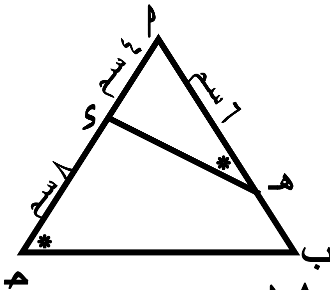
(٩) فى الشكل المقابل:



$\overline{\text{ب هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ء هـ}}$ = { ٲ }
ق(ب̂) = ق(هـ̂) = ٩٠°
(١) أثبت أن
Δ ٲ ب هـ ~ Δ ٲ هـ ء
(٢) أوجد: ب هـ ، ٲ هـ

****

(١٠) فى الشكل المقابل:



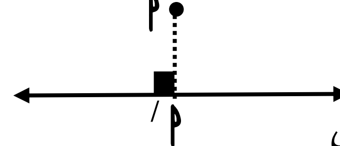
ق(ٲ هـ̂ ء) = ق(هـ̂)
ٲ ء = ٤ سم ، ء هـ = ٨سم
ٲ هـ = ٦ سم

(١) أثبت أن: Δ ٲ ء هـ ~ Δ ٲ ب هـ
(٢) أوجد طول ٲ ب

المساقط

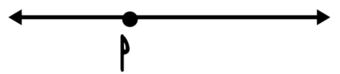
(٢) مسقط نقطة على مستقيم

هو موقع العمود المرسوم من تلك النقطة إلى ذلك المستقيم



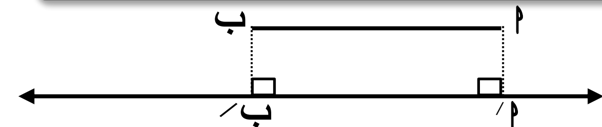
حالة خاصة إذا كان ﻡ ∈ ل

فإن مسقطها هو نفسها



(٢) مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم يكون

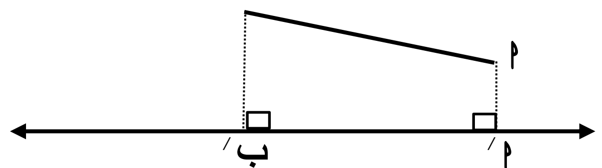
(١) مسقط قطعة مستقيمة موازية لمستقيم



مسقط $\overline{\text{ﻡ ب}}$ على المستقيم ل هو $\overline{\text{ﻡ/ ب/}}$

طول ﻡ ب = طول ﻡ/ ب/

(٢) مسقط قطعة مستقيمة غير موازية لمستقيم



مسقط $\overline{\text{ﻡ ب}}$ على المستقيم $\overline{\text{ل}}$ هو $\overline{\text{ﻡ/ ب/}}$

طول ﻡ ب > طول ﻡ/ ب/

(٣) مسقط قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم

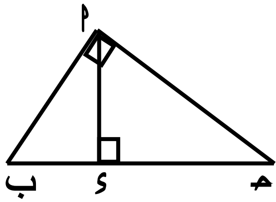
مسقط قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم معلوم هو نقطة



ملاحظة

طول مسقط أى قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم ≥ طول القطعة المستقيمة الأصلية

فى الشكل المقابل :



مسقط ﻡ هـ على ب هـ هو ى هـ

مسقط ﻡ ب على ب هـ هو ى ب

مسقط ﻡ ى على ب هـ هو { ى }

مسقط ﻡ هـ على ﻡ ى هو ﻡ ى

مسقط ﻡ ب على ﻡ ى هو ﻡ ى

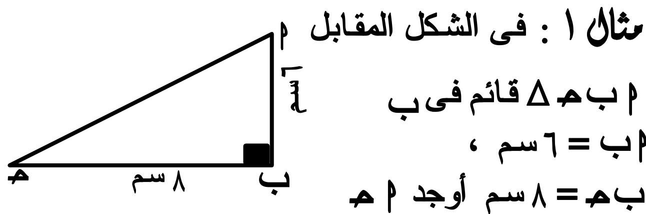
****

نظرية فيثاغورث

مساحة المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة

****

مثال ١ : فى الشكل المقابل



ﻡ ب هـ Δ قائم فى ب

ﻡ ب = ٦ سم ، ب هـ = ٨ سم أوجد ﻡ هـ

الحـــل

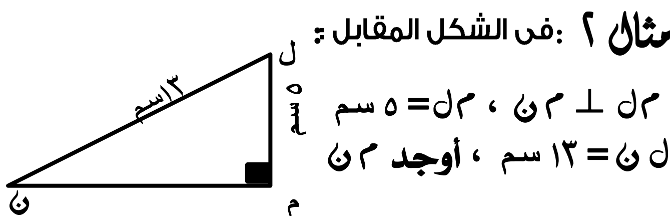
$(\text{ﻡ هـ})^2 = (\text{ﻡ ب})^2 + (\text{ب هـ})^2$

$(\text{ﻡ هـ})^2 = ٨^2 + ٦^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

ﻡ هـ = ١٠ سم

****

مثال ٢ : فى الشكل المقابل



ﻡ ل ⊥ ﻡ ن ، ﻡ ل = ٥ سم

ل ن = ١٣ سم ، **أوجد** ﻡ ن

الحـــل

$(\text{ﻡ ن})^2 = (\text{ل ن})^2 - (\text{ل ﻡ})^2$

$= ١٣^2 - ٥^2$

$= ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤$

ﻡ ن = ١٢ سم

عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربع طول ضلع فى مثلث يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الأخرين كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة

إذا كان

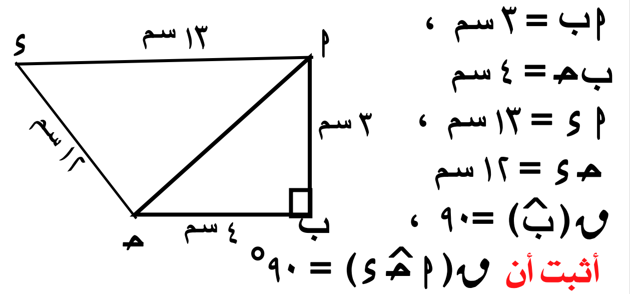
(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

فإن ∠ب قائمة

****

مثال ١ : فى الشكل المقابل :

أ ب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم
أ ء = ١٣ سم ،
جـ ء = ١٢ سم
ق(∠ب) = ٩٠ ،
أثبت أن ق(∠أ جـ ء) = ٩٠°



البرهان

∵ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ Δ أ ب جـ قائم فى ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = ٤^{٢} + ٣^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

أ جـ = ٥ سم

فى Δ أ جـ ء :

أ جـ = ٥ سم ، أ ء = ١٣ سم ، جـ ء = ١٢ سم

(أ ء)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩

(أ جـ)^{٢} + (جـ ء)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

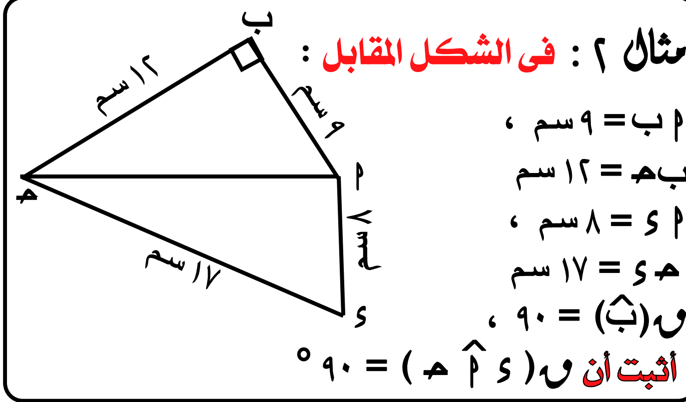
= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (أ ء)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (جـ ء)^{٢}

∴ ق(∠أ جـ ء) = ٩٠°

مثال ٢ : فى الشكل المقابل :

أ ب = ٩ سم ،
ب جـ = ١٢ سم
أ ء = ٨ سم ،
جـ ء = ١٧ سم
ق(∠ب) = ٩٠ ،
أثبت أن ق(ء أ جـ) = ٩٠°



البرهان

∵ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ Δ أ ب جـ قائم فى ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= ١٢^{٢} + ٩^{٢} = ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥

أ جـ = ١٥ سم

فى Δ أ جـ ء :

أ جـ = ١٥ سم ، أ ء = ٨ سم ، جـ ء = ١٧ سم

(جـ ء)^{٢} = (١٧)^{٢} = ٢٨٩

(أ جـ)^{٢} + (أ ء)^{٢} = (١٥)^{٢} + (٨)^{٢} = ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩

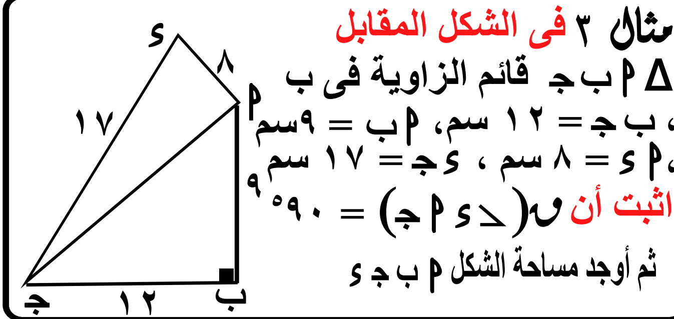
∴ (جـ ء)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ ء)^{٢}

∴ ق(ء أ جـ) = ٩٠°

****

مثال ٣ فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب
، ب جـ = ١٢ سم، أ ب = ٩سم
، أ ء = ٨ سم ، ء جـ = ١٧ سم
أثبت أن ق(∠ء أ جـ) = ٩٠°
ثم أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء



البرهان

∵ Δ أ ب جـ القائم فى ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

أ جـ = √٢٢٥ = ١٥ سم

فى Δ أ ء جـ

∵ (ء جـ)^{٢} = (١٧)^{٢} = ٢٨٩

(أ ء)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩

∴ (ء جـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (أ جـ)^{٢} ∴ ق(∠ء أ جـ) = ٩٠°

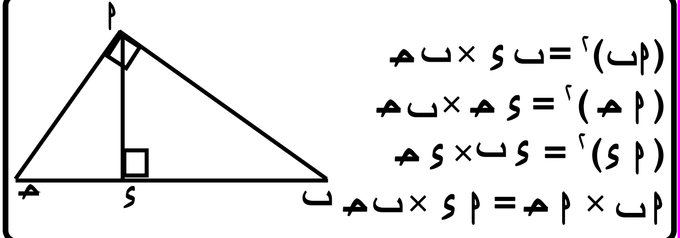
∵ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٩ = ٥٤ سم^{٢}

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ٨ = ٦٠ سم^{٢}

مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٥٤ + ٦٠ = ١١٤ سم^{٢}

نظرية إقليدس

مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مساحة المستطيل الذى بعداه مسقط هذا الضلع على الوتر و طول الوتر



(أ ب)^{2} = ب ء × ب جـ

(أ جـ)^{2} = ء جـ × ب جـ

(أ ء)^{2} = ء ب × ء جـ

أ ب × أ جـ = أ ء × ب جـ

مثال ١ : فى الشكل المقابل

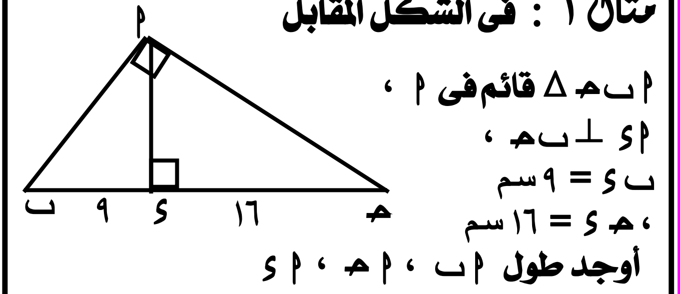
أ ب جـ Δ قائم فى أ ،

أ ء ⊥ ب جـ ،

ب ء = ٩ سم

، جـ ء = ١٦ سم

أوجد طول أ ب ، أ جـ ، أ ء



البرهان

∵ Δ أ ب جـ القائم فى أ ، أ ء ⊥ ب جـ

∴ (أ جـ)^{2} = جـ ء × جـ ب

⟸ (أ جـ)^{2} = ١٦ × ٢٥ = ٤٠٠

أ جـ = ٢٠ سم

(أ ب)^{2} = ب ء × ب جـ

⟸ (أ ب)^{2} = ٩ × ٢٥ = ٢٢٥

أ ب = ١٥ سم

(أ ء)^{2} = ء جـ × ء ب

⟸ (أ ء)^{2} = ٩ × ١٦ = ١٤٤

أ ء = ١٢ سم

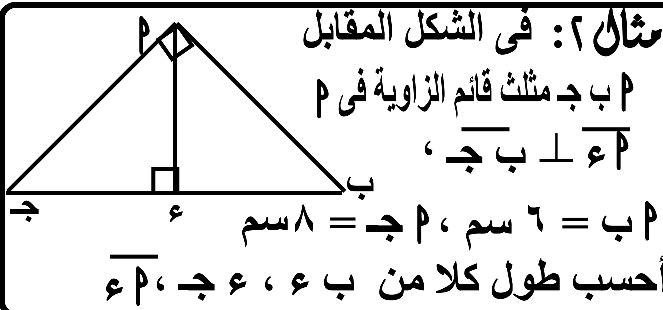
مثال ٢ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

أ ء ⊥ ب جـ ،

أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٨ سم

أحسب طول كلا من ب ء ، ء جـ ، أ ء



البرهان

∵ Δ أ ب جـ قائم فى

(ب جـ)^{2} = (أ ب)^{2} + (أ جـ)^{2}

= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

ب جـ = √١٠٠ = ١٠ سم

∵ Δ أ ب جـ القائم فى أ ، أ ء ⊥ ب جـ

(أ ب)^{2} = ب ء × ب جـ

٣٦ = ب ء × ١٠ ⟸ ب ء = ٣٦ / ١٠ = ٣,٦سم

(أ جـ)^{2} = جـ ء × ب جـ

٦٤ = جـ ء × ١٠ ⟸ ب ء = ٦٤ / ١٠ = ٦,٤سم

أ ء = (أ ب × أ جـ) / ب جـ ⟸ أ ء = (٦ × ٨) / ١٠ = ٤,٨

****

مثال ٣ : فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه

ء هـ ⊥ أ جـ

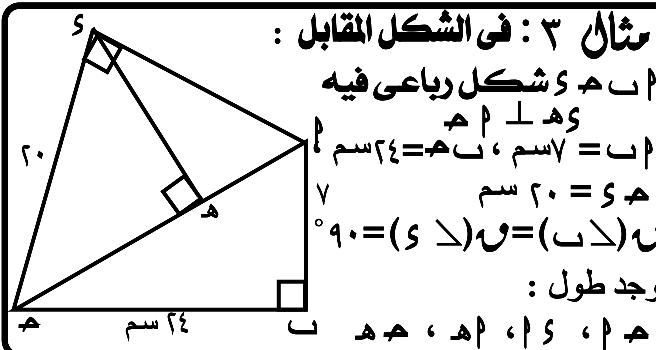
، أ ب = ٧سم ، ب جـ = ٢٤سم

ء جـ = ٢٠ سم

ق(∠ب) = ق(∠ ء) = ٩٠°

أوجد طول :

جـ أ ، ء أ ، أ هـ ، هـ جـ



البرهان

∵ Δ أ ب جـ القائم فى ب

(أ جـ)^{2} = (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2}

(أ جـ)^{2} = ٥٧٦ + ٤٩ = ٦٢٥ ⟸ أ جـ = ٢٥ سم

∵ Δ أ ء جـ القائم فى ء

(أ ء)^{2} = (أ جـ)^{2} − (ء جـ)^{2}

(أ ء)^{2} = ٦٢٥ − ٤٠٠ = ٢٢٥ ⟸ أ ء = ١٥ سم

∵ Δ أ ء جـ القائم فى ء ، ء هـ ⊥ أ جـ

(أ ء)^{2} = أ هـ × أ جـ

⟸ (١٥)^{2} = أ هـ × ٢٥ ⟸ أ هـ = ٢٢٥ / ٢٥ = ٩ سم

هـ جـ = ٢٥ − ٩ = ١٦ سم

التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزواياه

يكون المثلث

منفرج الزاوية

إذا كان $(أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

قائم الزاوية

إذا كان $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

حاد الزوايا

إذا كان $(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

****

مثال ١ : بين نوع كلاً من المثلثات الأتية :

(١) أ ب = ٨ سم، ب جـ = ١٠ سم، أ جـ = ٦ سم

الحل

$(ب جـ)^2 = (١٠)^2 = ١٠٠$

$(أ جـ)^2 + (أ ب)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$

∴ $(ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 + (أ ب)^2$

∴ Δ قائم فى أ

****

(٢) أ ب = ١٢ سم، ب جـ = ١٣ سم ، أ جـ = ٧ سم

الحل

$(ب جـ)^2 = (١٣)^2 = ١٦٩$

$(أ جـ)^2 + (أ ب)^2 = (١٢)^2 + (٧)^2$

$= ١٤٤ + ٤٩ = ١٩٣$

∴ $(ب جـ)^2 < (أ جـ)^2 + (أ ب)^2$

∴ المثلث حاد الزوايا

(٣) أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٧ سم ، أ جـ = ٥ سم

الحل

$(ب جـ)^2 = (٧)^2 = ٤٩$

$(أ جـ)^2 + (أ ب)^2 = (٣)^2 + (٥)^2$

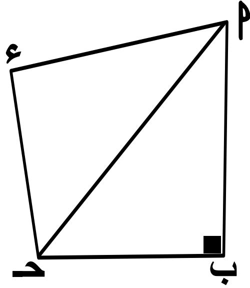
$= ٩ + ٢٥ = ٣٤$

∴ $(ب جـ)^2 > (أ جـ)^2 + (أ ب)^2$

∴ Δ منفرج الزاوية فى أ

تمارين (٥)

(١) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه

ق (∠ ب) = ٩٠°

، أ ب = ١٥ سم ،

ب جـ = ٢٠ سم، أ ء = ٢٤ سم

جـ ء = ٧ سم،

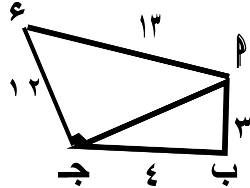
أوجد طول أ جـ

ثم أثبت أن ق (∠ ء) = ٩٠°

، أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء

****

(٢) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه

ق (∠ أ جـ ء) = ٩٠°

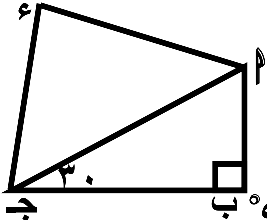
، ء جـ = ١٢ سم

أ ء = ١٣ سم ، أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٤ سم

أثبت أن ق (∠ ب) = ٩٠°

****

(٣) فى الشكل المقابل



ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

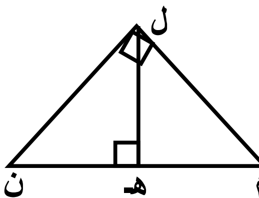
، أ ء = ١٦ سم

أ ب = ١٠ سم ، جـ ء = ١٢ سم

أثبت أن :ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°

****

(٤) من الشكل المقابل اكمل



(١) $(ل م)^2$ = ... × ....

(٢) $(ل م)^2$ = ... - ....

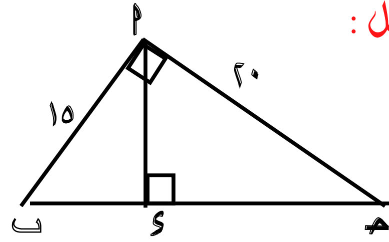
(٣) $(ل م)^2$ = ... + ...

(٤) $(ل هـ)^2$ = ... × ....

(٥) $(ل هـ)^2 = (ل م)^2$ - ....

(٦) ل هـ = $\frac{\text{.........} \times \text{.........}}{\text{..........}}$

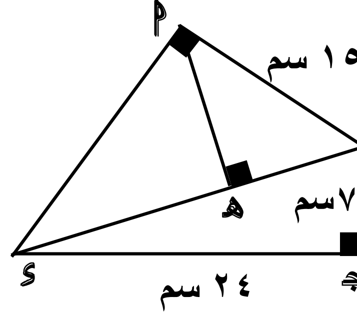
(٥) فى الشكل المقابل :



ﻡ ﺟ ⊥ ﻡ ب ،
ﻡ ء ⊥ ب ﺟ
ﻡ ﺟ = ٢٠ سم ،
ﻡ ب = ١٥ سم
أوجد طول
ﺟ ء ، ب ء ، ﻡ ء

****

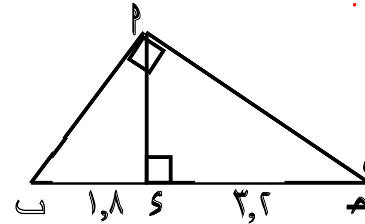
(٦) فى الشكل المقابل



(١) أوجد طول كل من
ب ء ، ﻡ ء
(٢) أوجد طول مسقط
ﻡ ب على ب ء

****

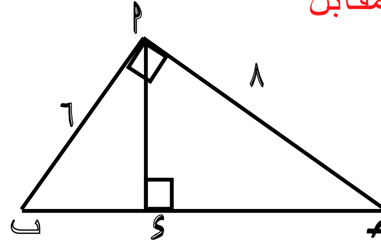
(٧) فى الشكل المقابل :



ب ء = ١,٨ سم ،
ء ﺟ = ٣,٢ سم
أوجد طول كلا من
ﻡ ﺟ ، ﻡ ء

****

(٨) فى الشكل المقابل



ﻡ ﺟ ⊥ ﻡ ،
ﻡ ء ⊥ ب ﺟ
ﻡ ﺟ = ٨ سم ،
ﻡ ب = ٦ سم
أوجد طول ﺟ ء ، ب ء ، ﻡ ء

****

(٩) حدد نوع الزاوية التى لها أكبر قياس
فى Δ ﻡ ب ﺟ حيث
ﻡ ب = ٨ سم ، ب ﺟ = ١١ سم ، ﻡ ﺟ = ٧ سم

(١٠) حدد نوع المثلث فى الحالات الاتية

(١) أ جـ = ٥ ، ب جـ = ٧ سم ، أ ب = ١٠ سم
(٢) س ص = ٤سم ، ص ع = ٦سم ، س ع = ٥
(٣) ل م = ٤٠سم ، م ن = ٤١ سم ، ل ن = ٩ سم

(١١) حدد نوع المثلث فى الحالات الاتية

(١) أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٥سم ، أ جـ = ٩ سم
(٢) أ ب = ٢٠سم ، ب جـ = ٢٥سم ، أ جـ = ١٢سم
(٣) أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٠سم ، أ جـ = ٧سم
(٤) أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٦سم
(٥) أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٦سم ، أ جـ = ٢٠سم

****

(١٢) أكمل لتحصل على عبارة صحيحة

١ فى Δ أ ب جـ إذا كان $(أ ب)^٢ < (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$ فان ب ..
٢ فى Δ أ ب جـ إذا كان $(أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$ فان ب .....
٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان $(أ ب)^٢ > (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$ فان ب........
٤ إذا كان المثلث حاد الزوايا فان مساحة المربع المنشأ على اى ضلع من أضلاعه .... من مجموع مساحتى المربعين المنشاين على الضلعين الاخرين
٥ إذا كان المثلث منفرج الزاوية فان مساحة المربع المنشأ الضلع المقابل للزاوية المنفرجة ....من مجموع مساحتى المربعين المنشاين على الضلعين الاخرين
٦ المثلث الذى أطوال أضلاعه ١٣سم ، ١٤سم ، ١٥ سم يكون ......